রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব

(Basic Principles of Statistics)

দ্বিতীয় খণ্ড

(দুইখণ্ডে সম্পূর্ণ)

ডঃ শৈলেশভূষণ চৌধুরী এম্. এস্. সি., পি. এইচ্. ডি.
রাশিবিজ্ঞান বিভাগ, আশুতোষ কলেজ, কলকাতা।

ডঃ অরিজিৎ চৌধুরী এম্. এ., পি. এইচ্. ডি.
রাশিবিজ্ঞান বিভাগ, কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়।

শ্রীবিশ্বনাথ দাস এম্. এ.
রাশিবিজ্ঞান বিভাগ, প্রেসিডেন্সি কলেজ, কলকাতা।

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা)

JULY, 1976

Published by Shri Abani Mitra, Chief Executive Officer, West Bengal State Book Board under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi and printed by Shri Tridibesh Basu at the K. P. Basu Printing Works, 11, Mohendra Gossain Lane, Calcutta-6.

উৎসর্গ

স্বর্গত পিতৃদেব ও মাতৃদেবীর স্মৃতির উদ্দেশে

শৈলেশভূষণ চৌধুরী

মাতৃদেবীকে ও স্বর্গত পিতৃদেবের স্মৃতির উদ্দেশে

অরিজিৎ চৌধুরী

মাতৃদেবীকে ও স্বর্গত পিতৃদেবের স্মৃতির উদ্দেশে

বিশ্বনাথ দাস

মুখবন্ধ

বেশ কিছুদিন হ'ল আমাদের দেশে ইংরাজীর পাশাপাশি মাতৃভাষাকেও পাশ পাঠক্রম স্নাতক স্তর পর্যন্ত শিক্ষাদানের মাধ্যম হিসাবে স্বীকার ক'রে নেওয়া হয়েছে। অতি সম্প্রতি মাতৃভাষার এই স্বীকৃতি সাম্মানিক স্নাতক ও স্নাতকোত্তর পর্যায়েও সম্প্রসারিত করা হয়েছে। কিন্তু দুঃখের বিষয়, রাশিবিজ্ঞানের বাংলা ভাষাভাষী ছাত্রছাত্রীগণ এই সুযোগ এখনও পাচ্ছে না, কারণ উল্লিখিত স্তরের ছাত্রছাত্রীদের উপযোগী বাংলা ভাষায় লিখিত রাশিবিজ্ঞানের পাঠ্যপুস্তক নেই। তাই পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের কাছ থেকে এই গ্রন্থ প্রণয়নের দায়িত্ব পেয়ে উৎসাহিত বোধ করলেও এ কাজে উদ্যোগী হবার সমস্যা ভেবে আমাদের যথেষ্ট দ্বিধা ও সঙ্কোচ ছিল। কিন্তু এটা ঠিক যে অন্ততঃ প্রথম পর্যায়ে বিদেশী ভাষার মাধ্যম ছাত্রছাত্রীদের পক্ষে রাশিবিজ্ঞানের মত একটি অপেক্ষাকৃত নতুন বিষয় আয়ত্ব করার পথে একটি বড়সড় বাধা। রাশিবিজ্ঞানের শিক্ষক হিসাবে আমাদের এই অভিজ্ঞতা শেষ পর্যন্ত 'রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব' প্রণয়নের দুরূহ কাজে হাত দিতে আমাদের প্রেরণা জুগিয়েছে। তা ছাড়া প্রত্যেক নতুন উদ্যোগ এক সময় কাউকে না কাউকে তো শুরু করতেই হয়।

'রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব' প্রধানতঃ পশ্চিমবাংলার বিশ্ববিদ্যালয়গুলির স্নাতক পাঠক্রমের উপযোগী করে লেখা হয়েছে। তবে সাম্মানিক রাশিবিজ্ঞান, গণিতশাস্ত্র, উচ্চতর নিরীক্ষাশাস্ত্র, অর্থনীতি ও বাণিজ্যের ছাত্রছাত্রীদের অনেক প্রয়োজনও এই পুস্তকখানির সাহায্যে মিটতে পারে ব'লে আমাদের মনে হয়। পশ্চিমবাংলায় অধুনা প্রবর্তিত উচ্চতর মাধ্যমিক পাঠক্রমের ছাত্রছাত্রীদের পক্ষেও পুস্তকখানি বিশেষ উপযোগী হবে। এ ছাড়াও বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় যাঁরা গবেষণা করেন এবং পেশাগত প্রয়োজনে যাঁরা প্রতিনিয়ত রাশিবিজ্ঞানসম্মত বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োগ করেন, তাঁদের পক্ষেও পুস্তকখানি অন্ততঃ আংশিকভাবে প্রয়োজনীয় বিবেচিত হতে পারে ব'লে আমাদের ধারণা। এই পুস্তক পাঠের পক্ষে বিদ্যালয়পাঠ্য গণিতের জ্ঞানই সাধারণভাবে পর্যাপ্ত হবে। তবে কয়েকটি পরিচ্ছেদে ম্যাট্রিক্স গণিত এবং অন্তরকলন ও সমাকলনের প্রাথমিক জ্ঞান প্রয়োজন হবে মনে রেখে পরিশিষ্টে এসম্বন্ধে কিছুটা আলোচনা করা হয়েছে।

পুস্তকখানি দুটি খণ্ডে প্রকাশিত হচ্ছে। প্রথম খণ্ডে (প্রথম থেকে একাদশ পরিচ্ছেদ পর্যন্ত) মোটামুটিভাবে রাশিতথ্য বিশ্লেষণের বিভিন্ন পদ্ধতি, প্রাথমিক সম্ভাবনাতত্ত্ব এবং দ্বিতীয় খণ্ডে (দ্বাদশ পরিচ্ছেদ থেকে শেষ পর্যন্ত) রাশিবিজ্ঞান-ভিত্তিক অনুমানতত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। পরিশিষ্টাংশটুকু থাকছে দ্বিতীয় খণ্ডে। প্রথম পরিচ্ছেদে রাশিবিজ্ঞানের সংজ্ঞা, প্রকৃতি, উদ্দেশ্য, উপযোগিতা ও সম্ভাব্য অপব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। পরবর্তী দুটি পরিচ্ছেদের বিষয়সূচীতে আছে রাশিতথ্য আহরণ, সারণী, লেখ ও চিত্রযোগে রাশিতথ্য উপস্থাপনার বিভিন্ন পদ্ধতি এবং পরিসংখ্যা বিভাজনের সাহায্যে রাশিতথ্য সংক্ষেপীকরণ সম্বন্ধে নানাবিধ আলোচনা। চতুর্থ থেকে ষষ্ঠ পরিচ্ছেদে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যগামিতা, বিস্তৃতি, প্রতিবৈষম্য, তীক্ষ্ণতা, পরিঘাত, পরিসংখ্যারেখা প্রভৃতি বিষয়। এই পর্যায়ে সমগ্রক ও অংশকের মধ্যে পার্থক্য খুব একটা গুরুত্বপূর্ণ মনে না হওয়ায় এযাবৎ আলোচনা মোটামুটিভাবে নমুনালব্ধ রাশিতথ্যের ওপরই সীমাবদ্ধ রাখা হয়েছে। সপ্তম পরিচ্ছেদের বিষয়সূচী প্রাথমিক সম্ভাবনাতত্ত্ব। অষ্টম পরিচ্ছেদে বলা হয়েছে বিভিন্ন একচল তত্ত্বগত বিভাজন সম্বন্ধে। নবম থেকে একাদশ পরিচ্ছেদে গুণলক্ষণের সংস্রব, চলের সহগতি ও নির্ভরণ, মানক্রমিক সহগাঙ্ক, অন্তঃশ্রেণীক সহগাঙ্ক ইত্যাদি বিস্তারিতভাবে আলোচিত হয়েছে। দ্বাদশ পরিচ্ছেদে দেওয়া হয়েছে সাযুজ্যরেখা নিরূপণের বিভিন্ন পদ্ধতি। ত্রয়োদশ থেকে পঞ্চদশ পরিচ্ছেদে রাশিবিজ্ঞানভিত্তিক অনুমানতত্ত্ব স্থান পেয়েছে। এর মধ্যে ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদে আছে নমুনাতত্ত্ব সম্বন্ধে প্রাথমিক আলোচনা এবং কিছু প্রয়োজনীয় নমুনাজ বিভাজন। প্রাক্কলন ও প্রকল্প-বিচারের মূলনীতি, নর্ম্যাল বিভাজন-ভিত্তিক কিছু যথার্থ প্রাক্কলন ও প্রকল্পবিচার এবং প্রভেদ-বিশ্লেষণ পদ্ধতি বর্ণিত হয়েছে চতুর্দশ পরিচ্ছেদে। আর পঞ্চদশ পরিচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে বৃহৎ-নমুনাভিত্তিক আসন্নীকরণের উপযোগিতা এবং তার ওপর নির্ভরশীল কিছু প্রকাশন ও প্রকল্প-বিচার। পরিশিষ্টে ম্যাট্রিক্স গণিত, অন্তরকলন-সমাকলনের প্রাথমিক আলোচনা ছাড়াও আছে ভ্রান্তিতত্ত্ব, সংখ্যাভিত্তিক গণিত ইত্যাদি।

বিষয়বস্তু সহজবোধ্য করার জন্য সাধ্যমত উদাহরণ এবং চিত্রসহযোগে আলোচনায় চেষ্টা করা হয়েছে। যথাসম্ভব বাস্তব ও ভারতীয় রাশিতথ্য ব্যবহারের সাহায্যে পুস্তকটিকে আকর্ষণীয় ক'রে তোলার দিকে লক্ষ্য রাখা হয়েছে। ছাত্রছাত্রীদের অধীতবিদ্যা চর্চার সুবিধার জন্য প্রতি পরিচ্ছেদের শেষে

বেশ কিছু সুনির্বাচিত প্রশ্ন দেওয়া হয়েছে। এ ছাড়া আগ্রহী পাঠক-পাঠিকাদের জন্য বিভিন্ন বিষয়ের ওপর নির্বাচিত পুস্তক-তালিকাও দেওয়া হয়েছে।

বাংলাভাষায় এই পুস্তক প্রণয়ণের কাজ হাতে নিয়ে আমাদের সবচেয়ে বেশী যে অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়েছে সেটা হ'ল উপযুক্ত পরিভাষার অভাব। এ ব্যাপারে আমরা মোটামুটিভাবে ডঃ পূর্ণেন্দুকুমার বসুর 'রাশিবিজ্ঞানের গোড়ার কথা' (বিশ্বভারতী, 1956) এবং শ্রীভাগবত দাশগুপ্ত, ডঃ অরিজিৎ চৌধুরী ও শ্রীবিশ্বনাথ দাস সঙ্কলিত 'রাশিবিজ্ঞানের পরিভাষা' (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, 1972) পুস্তিকা-দুটির ওপর নির্ভর করেছি। অত্যন্ত বিশেষ অর্থে ব্যবহৃত এবং আন্তর্জাতিক স্বীকৃতিসম্পন্ন শব্দ ভাষান্তরিত করা হয়নি এবং বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখায় গৃহীত পরিভাষা যথাসম্ভব অবিকৃত রাখা হয়েছে। প্রাথমিক অসুবিধার কথা স্মরণ রেখে কোন পরিভাষা এই পুস্তকে প্রথমবার ব্যবহারের সময় বন্ধনীতে ইংরাজী প্রতিশব্দটি দেওয়া হয়েছে। ব্যবহৃত পরিভাষা প্রামাণ্য ব'লে আমরা দাবী করি না—কিছু কিছু পরিভাষার উন্নতিসাধনের অবকাশ নিশ্চয়ই আছে। শিক্ষক, গবেষক, ছাত্র ও সাধারণ পাঠকবৃন্দের কাছ থেকে এই পুস্তক সম্পর্কিত সুচিন্তিত মতামত ও পরামর্শ আহ্বান করছি। ভবিষ্যৎ মুদ্রণে প্রয়োজনবোধে তদনুযায়ী পুস্তকটির পরিবর্তনসাধনে আমরা সচেষ্ট হব।

এই পুস্তকখানি প্রণয়নে উৎসাহ ও পরামর্শ দিয়ে এবং আরও নানাভাবে আমাদের সাহায্য করেছেন ডঃ পূর্ণেন্দুকুমার বসু, শ্রীঅনিলকুমার ভট্টাচার্য, শ্রীহরিকিঙ্কর নন্দী, স্বর্গত ডঃ অনুকূলচন্দ্র দাস প্রমুখ বিশিষ্ট রাশিবিজ্ঞানীগণ, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের রাশিবিজ্ঞান বিষয়ক সমিতির অন্যান্য সদস্যবৃন্দ এবং আমাদের বিভিন্ন সহকর্মী ও বন্ধুগণ। এই প্রসঙ্গে শ্রীদীপংকর বসুর নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। ডঃ অতীন্দ্রমোহন গুণ প্রথম পর্যায়ে সমগ্র পাণ্ডুলিপিখানি আদ্যোপান্ত পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পাঠ ক'রে যে সব মূল্যবান মতামত দিয়েছেন সেগুলি পুস্তকখানির উৎকর্ষবিধানে যথেষ্ট সাহায্য করেছে। দৈনিক স্টেট্‌স্‌ম্যান পত্রিকা, ইণ্ডিয়ান ফুটবল অ্যাসোসিয়েশন এবং হুগলী জেলার ইছাপুর উচ্চ বিদ্যালয় ও ইছাপুর পাবলিক লাইব্রেরীর কর্তৃপক্ষ কিছু প্রয়োজনীয় রাশিতথ্য সরবরাহ ক'রে আমাদের সহায়তা করেছেন। এঁদের সকলকে আমাদের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাই। আর ধন্যবাদ জানাই পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের সদস্যদের, বিশেষ ক'রে মুখ্য প্রশাসন আধিকারিক শ্রীঅবনী মিত্রকে, যাঁদের

উদ্যোগে এই পুস্তকখানি প্রকাশ করা সম্ভবপর হয়েছে এবং কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস-এর কর্তৃপক্ষ ও কর্মিবৃন্দকে, যাঁদের যত্ন, শ্রম ও কৃতিত্বে পুস্তকটির মুদ্রণ-সৌকর্য আশানুরূপ স্তরে পৌঁছেছে।

গ্রন্থখানি পাঠকসমাজে সমাদৃত হলে আমাদের শ্রম সার্থক বিবেচিত হবে।

কলকাতা
জুলাই, 1976

শৈলেশভূষণ চৌধুরী
অরিজিৎ চৌধুরী
বিশ্বনাথ দাস

সূচীপত্র

দ্বিতীয় খণ্ড

পরিচ্ছেদ পৃষ্ঠা

12 সাযুজ্যরেখা নিরূপণ 401—421

12.1 রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধনে সাযুজ্যরেখার ব্যবহার ; 12.2 সাযুজ্যরেখা নিরূপণের বিভিন্ন পদ্ধতি ; 12.2.1 হস্তাঙ্কন পদ্ধতি ; 12.2.2 লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি ; 12.2.3 নির্বাচিত বিন্দু পদ্ধতি ; 12.2.4 গোষ্ঠীগড় পদ্ধতি ; 12.3 তত্ত্বগত বিভাজন নিরূপণ : পরিঘাত পদ্ধতি ; 12.4 চলমান গড়ের সাহায্যে রাশিতথ্যের মসৃণতা সাধন ; অনুশীলনী ; নির্দেশিকা।

13 নমুনাজ বিভাজন 422—482

13.1 পূর্ণক ও নমুনা ; 13.2 নমুনা-চয়ন পদ্ধতি ; 13.3 পূর্ণকাঙ্ক ও নমুনাঙ্ক ; 13.4 নমুনাজ বিভাজন ; 13.5 বিচ্ছিন্ন চলসংক্রান্ত বিভাজন ; 13.5.1 পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ বিভাজন ; 13.5.2 পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ বিভাজন ; 13.6 অবিচ্ছিন্ন চল সংক্রান্ত বিভাজন ; 13.6.1 নর্ম্যাল চলের ঋজুরৈখিক অপেক্ষকের বিভাজন ; 13.6.2 নর্ম্যাল চলের প্রতিলম্ব রূপান্তরের বিভাজন ; 13.6.3 পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চলসমূহের ঋজুরৈখিক অপেক্ষকের বিভাজন ; 13.6.4 χ^2-বিভাজন ; 13.6.5 χ^2-সমষ্টির বিভাজন ; 13.6.6 t-বিভাজন ; 13.6.7 F-বিভাজন ; 13.7 বিচ্ছিন্ন চল সংক্রান্ত নমুনাজ বিভাজন ; 13.8 অবিচ্ছিন্ন চলসংক্রান্ত নমুনাজ বিভাজন ; 13.8.1 নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে গৃহীত নমুনার গড় ও ভেদমানের বিভাজন ; 13.8.2 'স্টুডেন্ট'-এর t-বিভাজন ; 13.8.3 'ফিশারে'র t-বিভাজন ; 13.8.4 'স্টুডেন্ট'-এর যুগ্ম t-বিভাজন ; 13.8.5

পরিচ্ছেদ পৃষ্ঠা

নির্ভরণাঙ্কের বিভাজন ; 13.8.6 'ফিশারের' F-বিভাজন ; 13.9 নমুনাঙ্কের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ-ভ্রান্তি ; 13.9.1 নমুনালব্ধ অশোধিত পরিঘাতের গাণিতিক প্রত্যাশা, প্রমাণ-ভ্রান্তি ইত্যাদি ; 13.9.2 নমুনালব্ধ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা, প্রমাণ-ভ্রান্তি ইত্যাদি ; 13.9.3 সসীম পূর্ণকের ক্ষেত্রে প্রত্যাশা, প্রমাণ-ভ্রান্তি ইত্যাদি ; 13.9.4 নমুনালব্ধ ভগ্নাংশের প্রত্যাশা, প্রমাণ-ভ্রান্তি ইত্যাদি ; অনুশীলনী ; নির্দেশিকা।

14 রাশিবিজ্ঞানভিত্তিক অনুমানতত্ত্ব 483—564

14.1 ভূমিকা ; 14.2 বিন্দু প্রাক্কলন ; 14.2.1 পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক ; 14.3 গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতি ; 14.3.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.3.2 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.3.3 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.4 অন্তর প্রাক্কলন ; 14.5 প্রকল্প বিচার ; 14.5.1 নেম্যান ও পিয়ার্সনের প্রকল্প বিচারতত্ত্ব ; 14.5.2 স্বজ্ঞাভিত্তিক প্রকল্প বিচার ; 14.6 কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে অন্তর প্রাক্কলন ও প্রকল্পবিচার ; 14.6.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.2 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.3 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.4 দুইটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.5 দ্বিচল নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.6 সরল নির্ভরণ-সংশ্লিষ্ট পূর্ণকাঙ্ক ; 14.6.7 বহুচল নর্ম্যাল পূর্ণকের আংশিক ও বহুল সহগাঙ্ক ; 14.7 প্রভেদ-বিশ্লেষণ ; 14.8 উদাহরণমালা ; অনুশীলনী ; নির্দেশিকা।

15 বৃহৎ-নমুনাভিত্তিক অনুমানে আসন্নীকরণ 565—628

15.1 ভূমিকা ; 15.2 সাধারণ পদ্ধতি ; 15.3 প্রমাণ-ভ্রান্তি ; 15.3.1 নমুনালব্ধ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা, ভেদমান ইত্যাদি ; 15.3.2 নমুনাজ প্রমাণ বিচ্যুতির ভেদমান ; 15.3.3 নমুনাজ প্রতিবৈষম্য-মাপকের ভেদমান ; 15.3.4 নমুনাজ

পরিচ্ছেদ পৃষ্ঠা

তীক্ষ্ণতা-মাপকের ভেদমান ; 15.3.5 নমুনাজ ভেদাঙ্কের ভেদমান ; 15.3.6 নমুনাজ সহগাঙ্কের ভেদমান ; 15.3.7 নমুনাজ ভগ্নাংশকের ভেদমান ; 15.4 কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে অন্তর প্রাক্কলন ও প্রকল্প বিচার ; 15.4.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.2 পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.3 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.4. পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.5 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.6 পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক ; 15.4.7 দ্বিচল নর্ম্যাল পূর্ণকের সহগাঙ্ক ; 15.5 নমুনাঙ্কের রূপান্তর ; 15.5.1 $\sin^{-1}\sqrt{p}$ রূপান্তর ; 15.5.2 $\sqrt{x}$ রূপান্তর ; 15.5.3 $\log s^2$ ও $\log s$ রূপান্তর ; 15.5.4 z-রূপান্তর ; 15.5.5 আস্থা-অন্তর নিরূপণে ও প্রকল্প বিচারে নমুনাঙ্ক রূপান্তরের প্রয়োগ ; 15.6 পরিসংখ্যা χ^2 ; 15.6.1 সাযুজ্যের উৎকর্ষ বিচার ; 15.6.2 অন্তর্সাম্য বিচার ; 15.6.3 অনপেক্ষতা বিচার ; 15.6.4 পরিসংখ্যা χ^2-এর সরলতর রূপ ; 15.6.5 ইয়েটসের অবিচ্ছিন্নতা শুদ্ধি ; 15.7 উদাহরণ-মালা ; অনুশীলনী ; নির্দেশিকা।

পরিশিষ্ট 629—725

A প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স গণিত ;

B অন্তর্কলন ও সমাকলন সংশ্লিষ্ট কয়েকটি বিষয় ;

C সংখ্যাভিত্তিক গণিত ; C.1 রাশির সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তি ও তার অপনোদন ; C.2 প্রক্ষেপণ ; C.2.1 ভূমিকা ; C.2.2 নিউটনের পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র ; C.2.3 নিউটনের পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণ সূত্র ; C.2.4 লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণ সূত্র ; C.2.5 বিভক্ত পার্থক্য সূত্র ; C.2.6 বিভক্ত পার্থক্যের মাধ্যমে লাগ্রাঞ্জের সূত্র ; C.2.7 মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্রাবলী ; C.2.8 উপসারণী গঠন ; C.2.9 বিবর্ত প্রক্ষেপণ ; C.2.10 দ্বিচলক প্রক্ষেপণ ; C.2.11 প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট

পরিচ্ছেদ পৃষ্ঠা

পদ নির্ণয় ; C.3 সংখ্যাভিত্তিক সমাকলন ; C.3.1 ভূমিকা ; C.3.2 ট্রাপিজয়ডাল বিধি ; C.3.3 সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি ; C.3.4 সিম্পসনের বিধি-সংক্রান্ত ভ্রান্তি ; C.4 একটি অজ্ঞাত রাশি সম্বলিত সমীকরণের সংখ্যাভিত্তিক সমাধান ; C.4.1 ভূমিকা ; C.4.2 ভ্রান্ত অবস্থিতি পদ্ধতি ; C.4.3 নিউটন-র‍্যাফসনের পদ্ধতি ; C.4.4 পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি ; C.5 নর্ম্যাল ভ্রান্তি তত্ত্ব ; অনুশীলনী ; নির্দেশিকা।

সারণী 727—735

নির্ঘণ্ট 737—740

শুদ্ধিপত্র 741

12 সাযুজ্যরেখা নিরূপণ
(Curve Fitting)

12.1 রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধনে সাযুজ্যরেখার ব্যবহার।

আগেই বলা হয়েছে রাশিবিজ্ঞানসম্মত বিশ্লেষণের প্রয়োজনে অনেক সময় পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলের ওপর একই সঙ্গে রাশিতথ্য সংগ্রহ করা হয়। চলদুটির একটিকে বলা যায় অনধীন, অন্যটি এই অনধীন চলের ওপর নির্ভরশীল। সময়কে অনধীন চল হিসাবে ধরলে প্রতিটি কালীন সারিই এই জাতীয় দ্বিচল রাশিতথ্যের উদাহরণ। যেমন, বিভিন্ন সময়বিন্দুর জন্য কোন দেশের জনসংখ্যা, বিভিন্ন বয়সগোষ্ঠীর জন্য কোন দেশে একটি বিশেষ সালে লক্ষিত মৃত্যুহার, বিভিন্ন সালে দেশে কোন শিল্পজাত বা কৃষিজাত দ্রব্যের উৎপাদন, বিভিন্ন বয়সে একটি শিশুর ওজন, ইত্যাদি। কালীন সারি ছাড়াও এই জাতীয় পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলের অসংখ্য উদাহরণ পাওয়া যাবে—যেমন, তরলপদার্থের তাপাঙ্ক এবং আয়তন, কৃষিজমিতে প্রদত্ত সারের পরিমাণ এবং উৎপাদন, ইত্যাদি।

এখন এই ধরনের রাশিতথ্য বিশ্লেষণের সময় বেশীরভাগ ক্ষেত্রে একটি বিশেষ অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়। অনধীন চলটির মান (যেটা সাধারণতঃ নিয়ন্ত্রণে রাখা যায়) ভ্রান্তিশূন্য অবস্থায় পাওয়া গেলেও, মাপনযন্ত্রের সীমাবদ্ধতা প্রভৃতি নানান কারণে অধীন চলটির সংগৃহীত মানে কিছু কিছু মাপনাভ্রান্তি (errors of measurement) এবং অবেক্ষণভ্রান্তি (errors of observation) থাকা খুবই সম্ভব। অথচ সুষ্ঠু বিশ্লেষণের প্রয়োজনে অনধীন চলের বিভিন্ন মানের জন্য অধীন চলটির যথার্থ (অর্থাৎ, মাপনাভ্রান্তি, অবেক্ষণভ্রান্তি এবং অনিয়মিত চাঞ্চল্য বর্জিত) মানগুলি নেওয়াই বাঞ্ছনীয়। সাধারণভাবে এইসব বিচ্যুতি ও চাঞ্চল্যের পরিমাণ জানা না থাকায় সংগৃহীত মান থেকে এগুলি সরাসরি দূর করা যায় না। এক্ষেত্রে আলোচ্য চলদুটির—ধরা যাক X (অনধীন) এবং Y (অধীন)-এর মধ্যে যদি কোন প্রতিষ্ঠিত গাণিতিক সম্পর্কের কথা—যেমন, ধরা যাক $Y=f(X, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$—জানা থাকে, বা অভিজ্ঞতা প্রভৃতি থেকে এ ধরনের কোন সম্পর্কের কথা ভাবা যায়, তাহলে আমাদের সমস্যাটি কিছুটা

সমাধান করা সম্ভব। সাধারণতঃ $Y=f(X, \theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_k)$ এই সম্পর্কের রূপটি (form) জানা থাকে, কিন্তু সংশ্লিষ্ট ধ্রুবকগুলির, অর্থাৎ $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_k$-এদের, মান জানা থাকে না। যেমন, কোন দেশে t সময়বিন্দুতে জনসংখ্যা P_t মোটামুটি-ভাবে হবে

$$P_t = \frac{L}{1+e^{r(\beta-t)}}$$

—এটা জানা থাকে, কিন্তু r, β এবং L-এর মান জানা থাকে না, এক একটি দেশের জন্য এগুলির মান এক এক রকম হয়। এই পরিস্থিতিতে চলদ্বুটির প্রদত্ত মানগুলি ব্যবহার ক'রে $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_k$-এদের অনুমিত মান নির্ণয় ক'রে $f(X, \theta_1,\ldots, \theta_k)$-এর যথার্থ প্রকাশনটি সম্পূর্ণরূপে চিহ্নিত করা যেতে পারে। এখন ধ্রুবকগুলির অনুমিত মান এমনভাবে নেওয়ার চেষ্টা করা হয় যাতে X-এর বিভিন্ন মানের জন্য নিরূপিত রেখা থেকে পাওয়া Y-এর বিভিন্ন মান সংশ্লিষ্ট লক্ষিত মানগুলির সঙ্গে যথাসম্ভব নৈকট্য বজায় রাখে। স্পষ্টতঃই নিরূপিত রেখা থেকে পাওয়া Y-এর মানগুলি থেকে লক্ষিত মানের পূর্ববর্ণিত অবাঞ্ছিত বিচ্যুতি, চাঞ্চল্য বা ভ্রান্তিগুলি দূরীভূত হবে, কারণ এগুলি সুস্পষ্ট গাণিতিক সম্পর্ক থেকে পাওয়া। এক্ষেত্রে বলা হয় প্রদত্ত রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধন (smoothing) করা হ'ল $Y=f(X, \theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_k)$ এই সাযুজ্যরেখাটি নিরূপণের সাহায্যে। নিরূপিত সাযুজ্যরেখাটি অন্তঃপ্রক্ষেপণ (interpolation), বহিঃপ্রক্ষেপণ (extra-polation) বা পূর্বাভাসদান (forecasting) প্রভৃতি কাজে ব্যবহৃত হতে পারে। সাযুজ্যরেখালব্ধ Y-এর মানগুলিকে তাই Y-এর আভাসিত (predicted) বা প্রত্যাশিত (expected) মান বলা হয়।

মূল উদ্দেশ্য মসৃণতাসাধন না হলেও অনেক সময় সাযুজ্যরেখা নিরূপণ করা প্রয়োজন হতে পারে। যেমন, পূর্বাভাসদ্যোতক সূত্র স্থাপন করা হয় চলদ্বুটির ওপর সংগৃহীত কিছু তথ্যের ভিত্তিতে। এক্ষেত্রে সূত্রটি স্থাপন করাই আমাদের আসল উদ্দেশ্য। Y-এর লক্ষিত মানগুলির মসৃণতাসাধনের দিকে আমাদের লক্ষ্য থাকে না।

সংশ্লিষ্ট চল-দ্বুটির মধ্যে সুস্পষ্ট কোন গাণিতিক সম্পর্ক জানা না থাকলেও বিষয়টি গবেষণার স্তরে থাকতে পারে। সেক্ষেত্রে অনুমানের ভিত্তিতে একটি কল্পিত (hypothetical) সম্পর্ক চলদ্বুটির মধ্যে বিদ্যমান কি না পরীক্ষা ক'রে দেখার উদ্দেশ্যে চল-দ্বুটির ওপর সংগৃহীত রাশিতথ্য থেকে সংশ্লিষ্ট সাযুজ্যরেখাটি

নিরূপণ ক'রে অধীন চলের লক্ষিত মানগুলির সঙ্গে আভাসিত মানগুলির তুলনা করা যেতে পারে।

রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধনের একাধিক পদ্ধতি আছে। সাযুজ্যরেখা নিরূপণের সাহায্যে মসৃণতাসাধন প্রক্রিয়াটি রাশিতথ্যের ক্রমগতিসাধন (graduation) নামে পরিচিত। Y-এর বিচ্যুতিমুক্ত আভাসিত মানগুলিকে এক্ষেত্রে ক্রমগতিসাধিত (graduated) মান বলা হয়।

12.2 সাযুজ্যরেখা নিরূপণের বিভিন্ন পদ্ধতি :

বিভিন্ন ধরনের সাযুজ্যরেখা নিরূপণের জন্য বিভিন্ন পদ্ধতি অনুসৃত হয়। কিছু কিছু সাযুজ্যরেখা আবার একাধিক পদ্ধতিতে নিরূপণ করা চলে। নীচে প্রচলিত কয়েকটি পদ্ধতির আলোচনা করা হয়েছে।

12.2.1 হস্তাঙ্কন পদ্ধতি :

অধিকাংশ সময় দুটি চলের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্কটি একটি ঘাতজকের (polymomial) সাহায্যে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ,

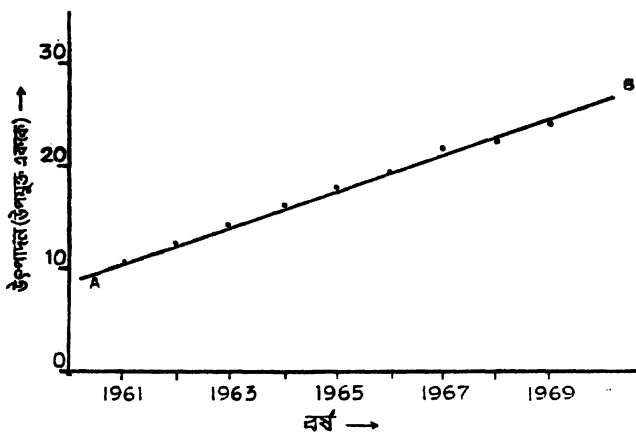
$$Y=f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_pX^p. \qquad \cdots (12.1)$$

এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট ধ্রুবকগুলি হ'ল $a_0, a_1, \ldots, a_p$. ঘাতজকের সরলতম রূপ

সারণী 12.1

সাল	উৎপাদন (উপযুক্ত এককে)
1961	10·5
62	12·8
63	14·2
64	16·0
65	17·4
66	19·1
67	20·5
68	22·2
69	23·8

হ'ল সরলরেখা। সেক্ষেত্রে $p=1$, অর্থাৎ $Y=a_0+a_1X$. দুটি চলের মধ্যে এই ধরনের রৈখিক সম্পর্ক আছে জানা থাকলে a_0 এবং a_1-এর অনুমিত মান নিরূপণ না করেও সরলরেখাটি খুব সহজ একটি পদ্ধতিতে চিহ্নিত করা যায়। এই পদ্ধতিতে প্রথমে পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুটি অক্ষরেখার সম্পর্কে (উল্লম্ব অক্ষরেখায় অধীন চলটি সূচিত করে) উপযুক্ত স্কেল ব্যবহার ক'রে লক্ষিত মানগুলি বিন্দুর সাহায্যে নির্দেশ করা হয়। অতঃপর এই বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির সঙ্গে যথাসম্ভব নৈকট্য বজায় রেখে একটি সরলরেখা আঁকা হয়। এইটিই উদ্দিষ্ট সাযুজ্যরেখা। এই রেখার উপরিস্থিত বিভিন্ন বিন্দুর Y-স্থানাঙ্ক অধীন চলটির বিভিন্ন আভাসিত মান সূচিত করে। উপরের উদাহরণটি লক্ষ্য কর :

এক্ষেত্রে 12'1 চিত্রে হস্তাঙ্কিত সাযুজ্যরেখা AB থেকে আলোচ্য সালগুলির জন্য উৎপাদনের আভাসিত পরিমাণ পাওয়া যায় যথাক্রমে 10'4, 12'2, 14'0, 15'9, 17'9, 19'0, 20'8, 22'6 ও 24'5

চিত্র 12'1

12.1 কারখানায় উৎপাদনের বিন্দুচিত্র এবং একটি হস্তাঙ্কিত সাযুজ্যরেখা (সারণী 12.1)।

সরলরেখা ব্যতীত উচ্চতর মাত্রার ঘাতজকের ক্ষেত্রেও এই পদ্ধতিটি ব্যবহার করা চলে। তবে সেক্ষেত্রে নিখুঁতভাবে অঙ্কনের কাজটি সহজ নয় বলে পদ্ধতিটি ব্যবহার না করাই ভাল।

পদ্ধতিটি সহজ হলেও একান্তভাবে ব্যক্তিনির্ভর বলে সাধারণভাবে অনুমোদনযোগ্য নয়। তাছাড়া এ পদ্ধতিতে সাযুজ্যরেখা নিরূপণে ভ্রান্তির পরিমাণ সম্বন্ধে কিছুই জানা যায় না।

12.2.2 লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি :

হস্তাঙ্কন পদ্ধতির সবথেকে বড় অসুবিধা হ'ল, এটি একান্তভাবে ব্যক্তিনির্ভর। স্পষ্টতঃই 'সংস্থাপিত বিন্দুগুলির যথাসম্ভব কাছাকাছি'—এই ভিত্তিতে একাধিক সরলরেখা টানা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে কোন্ রেখাটির সাযুজ্যতা সবথেকে ভাল তা বিচার হবে কীভাবে? লঘিষ্ঠ-বর্গ পদ্ধতি প্রয়োগ ক'রে এই প্রশ্নের সমাধান পাওয়া যায়।

মনে কর (12.1) সূত্রে প্রদত্ত ঘাতজকটি নিরূপণ করতে হবে, অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে $a_0, a_1, \ldots, a_p$ এই কটি ধ্রুবকের অনুমিত মান নির্ণয় করতে হবে। অনধীন চলের i-তম মান x_i-এর জন্য অধীন চলের প্রদত্ত লক্ষিত মানটি y_i এবং আভাসিত মানটি Y_i দ্বারা নির্দেশ করা হলে, অর্থাৎ

$$Y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_p x_i^p \qquad \cdots (12.2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

হলে i-তম মানের ভ্রান্তি হবে

$$d_i = y_i - Y_i. \qquad \cdots (12.3)$$

এখন লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (Method of Least squares) অনুসারে $a_0, a_1, \ldots, a_p$ এই ধ্রুবকগুলির মান এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যেন ভ্রান্তি

বর্গ সমষ্টি $S^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$-এর মান,

$$\text{অর্থাৎ} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_p x_i^p)^2 \qquad (12.4)$$

এর মান লঘিষ্ঠ হয়। স্পষ্টতঃই

$$\frac{\partial S^2}{\partial a_j} = 0,$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_p x_i^p)^2 = 0, \qquad \cdots (12.5)$$

$$j = 0(1)p$$

এই $(p+1)$-টি সমীকরণ $a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}$—এই $(p+1)$-টি অজ্ঞাত রাশির জন্য যুগপৎ সমাধান ক'রে রাশিগুলির যে সব মান পাওয়া যাবে (12.4) সূত্রে সেগুলি বসালেই S^2-এর মান লঘিষ্ঠ হবে।

(12.5) সমীকরণগুলি বিশদভাবে লিখে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i &= na_0 + a_1 \sum x_i + \\
&\quad a_2 \sum_i x_i^2 + \cdots + a_p \sum x_i^p \\
\sum_i x_i y_i &= a_0 \sum_i x_i + \\
&\quad a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \cdots + a_p \sum x_i^{p+1} \\
\sum_i x_i^p y_i &= a_0 \sum x_i^p + a_1 \sum x_i^{p+1} + \\
&\quad a_2 \sum x_i^{p+2} + \cdots + ap \sum x_i^{2p}
\end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

$p=1$ হলে, অর্থাৎ সরলরেখার ক্ষেত্রে

$$\left.\begin{aligned}
\sum_i y_i &= na_0 + a_1 \sum x_i \\
\sum_i x_i y_i &= a_0 \sum_i \;_i + a_1 \sum_i x_i^2
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots \quad (12.6a)$$

এবং $p=2$ হলে, অর্থাৎ অধিবৃত্তের (parabola) ক্ষেত্রে,

$$\left.\begin{aligned}
\sum_i y_i &= na_0 + a_1 \sum_i x_i + a_2 \sum_i x_i^2 \\
\sum y_i x_i &= a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 \\
\sum x_i^2 y_i &= a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4
\end{aligned}\right\} \quad (12.6b)$$

(12.6) সূত্রে প্রদত্ত সমীকরণগুলি সমাধান ক'রে সাযুজ্যরেখার অজ্ঞাত ধ্রুবকগুলির অনুমিত মান নির্ণয় করা হয়। এগুলিকে নর্ম্যাল সমীকরণ (normal equations) বলে।

প্রদত্ত রাশিতথ্যে x-এর মানগুলি সমান্তর (equispaced) হলে চলটির এমনভাবে রৈখিক রূপান্তর সাধন করা যেতে পারে যাতে রূপান্তরিত চলের অযুগ্ম

ঘাতের সমষ্টিগুলির মান শূন্য হয়। এতে সমীকরণগুলির সমাধান কিছুটা সহজ হয়ে যায়। X-এর মানগুলির অন্তর c হলে রূপান্তরিত চল u টি নেওয়া হয়

$$u = \begin{cases} \dfrac{x_i - x_{k+1}}{c} & \text{যদি } n = 2k+1 \text{ হয়} \\ \dfrac{2[x_i - (x_k + x_{k+1})/2]}{c}, & \text{যদি } n = 2k \text{ হয়} \end{cases} \qquad (12.7)$$

স্পষ্টতঃই u-এর মানগুলি প্রথম ক্ষেত্রে $-k, -k+1, \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots k-1, k$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $-2k+1, -2k+3, \cdots -3, -1, 1, 3, \cdots 2k-3, 2k-1$ হয়, অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রেই

$$\sum_i u_i = \sum_i u_i^3 = \sum_i u_i^5 = \cdots = 0.$$

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে 12.1 সারণীতে প্রদত্ত রাশিতথ্যের সম্পর্কে $Y = a_0 + a_1 x$ সরলরেখাটি নিরূপণ করা যাক।

সারণী 12.2

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে সাযুজ্যরেখা (সরলরেখা) নিরূপণ

[12.1 সারণীর রাশিতথ্য]

x_i	y_i	$u_i = \dfrac{x_i - 1965}{10}$	u_i^2	$u_i y_i$	$Y_i = 17{\cdot}39 + 1{\cdot}624$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1961	10·5	−4	16	−42·0	10·91
1962	12·8	−3	9	−38·4	12·53
1963	14·2	−2	4	−28·4	14·15
1964	16·0	−1	1	−16·0	15·77
1965	17·4	0	0	0	17·39
1966	19·1	1	1	19·1	19·01
1967	20·5	2	4	41·0	20·63
1968	22·2	3	9	66·6	22·25
1969	23·8	4	16	95·2	23·87
মোট	156·5	0	60	97·1	

12.3 সারণীটির 6 নং স্তম্ভে y-এর প্রত্যাশিত মানগুলি নির্ণয় করা হয়েছে। হস্তাঙ্কিত পদ্ধতিতে পাওয়া সংশ্লিষ্ট মানগুলির সঙ্গে এগুলি তুলনা করা যেতে পারে।

এক্ষেত্রে সমীকরণ দুটি, $156{\cdot}5 = 9a_0$
$$97{\cdot}1 = 60a_1$$

সুতরাং
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 17{\cdot}39 \\ a_1 = 1{\cdot}62 \end{array}\right\}$$

সুতরাং সাযুজ্যরেখাটি $Y = 17{\cdot}39 + 1{\cdot}62u$, অর্থাৎ সাযুজ্যরেখাটি থেকে 1975 সালের উৎপাদনের পরিমাণের পূর্বাভাস দেওয়া যেতে পারে। $x = 1975$ হলে $u = 10$, সুতরাং y-এর প্রত্যাশিত মান $= 17{\cdot}39 + 1{\cdot}62 \times 10 = 33.59$.

উদা. 12.2. কৃষিসার সংক্রান্ত একটি পরীক্ষায়; ধরা যাক, নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া গেল।

সারের পরিমাণ (পাউণ্ড/একর)	0	200	400	600
উৎপাদনের পরিমাণ (পাউণ্ড/একর)	1544	1898	2133	2327

বিন্দুগুলি লেখচিত্রে সংস্থাপন করলে দেখা যাবে এক্ষেত্রে উপযুক্ত সাযুজ্য-রেখাটি একটি অধিবৃত্ত হওয়া সম্ভব। সুতরাং $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ এই রেখাটি নিরূপণ করা যাক।

সারণী 12.3

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে সাযুজ্যরেখা (অধিবৃত্ত) নিরূপণ।

x_i পাউণ্ড/একর	y_i পাউণ্ড/একর	$u_i = \frac{x_i - 300}{100}$	u_i^2	u_i^4	u_iy_i	$u_i^2y_i$	$Y = 2025{\cdot}5 + 129{\cdot}2u - 10{\cdot}0u^2$
0	1544	−3	9	81	−4632	13896	1547·9
200	1898	−1	1	1	−1898	1898	1886·3
400	2133	1	1	1	2133	2133	2164·7
600	2327	3	9	81	6981	20943	2323·1
মোট	7902		20	164	2584	38870	

এখানে সমীকরণগুলি $7902 = 4a_0 + 20a_2$

$$2584 = 20a_1$$

$$38870 = 20a_0 + 164a_2$$

অর্থাৎ, $a_0 = 2025\cdot5$, $a_1 = 129\cdot2$, $a_2 = -10\cdot0$.

সুতরাং সাযুজ্যরেখাটি $Y = 2025.5 + 129\cdot2u - 10\cdot0u^2$.

অনেক সময় প্রদত্ত সাযুজ্যরেখাটি ঘাতজক না হলেও উপযুক্ত রূপান্তর সাধনের পর ঘাতজকে পরিণত হয়। নীচের উদাহরণগুলি দেখ :

(a) $Y = \dfrac{1}{a + bx}$ ... ... (12.8a)

এখানে, $\dfrac{1}{Y} = a + bx$

সুতরাং $Z = a + bx$ $\left[Z = \dfrac{1}{Y}\text{ ধরে}\right]$.

(b) $Y = Ae^{Bx}$, (e লগারিদমের নেপারিয়ান নিধান)

$= ab^x$ ... ... (12.8b)

এখানে $\log Y = \log a + x \log b$

তাই, $Z = c + dx$ [$Z = \log Y$, $c = \log a$, $d = \log b$ ধরে]

(c) $Y = a.x^b$ ... ... (12.8c)

এখানে, $\log Y = \log a + b \log x$.

সুতরাং $u = c + bu$ [$u = \log Y$, $c = \log a$, $u = \log x$ ধরে]

(d) $Y = a^{b^x}$ ... ... (12.8d)

অর্থাৎ, $\log Y = b^x \log a$.

বা $\log(\log Y) = \log(\log a) + x \log b$.

বা, $Z = c + dx$

[$Z = \log(\log Y)$, $c = \log(\log a)$, $d = \log b$ ধরে]

সুতরাং এইসব ক্ষেত্রে প্রথমে প্রয়োজনীয় রূপান্তর সাধনের পর রূপান্তরিত চলগুলির সম্পর্কে সাযুজ্যরেখা নিরূপণ করা হয় লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে।

উদা. 12.3 বায়বীয় একটি পদার্থের চাপ (P) এবং আয়তন (V)-এর মধ্যে

$$PV^{\nu}=k \;(\nu,\, k \text{ ধ্রুবক}) \qquad \cdots (12.9)$$

সম্পর্কটি বিদ্যমান জানা আছে। এই সংক্রান্ত একটি পরীক্ষায় নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া গেছে

P কিগ্রা/বর্গসেমি	0·5	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0
V লিটার	1·620	1·000	0·750	0·620	0·520	0·460

P-কে অনধীন চল ধরে সাযুজ্যরেখাটি নিরূপণ করা যাক।

এক্ষেত্রে, $\log P+\nu \log V=\log K$

বা, $\nu \log V=\log K-\log P$

বা, $\log V=\dfrac{\log K}{\nu}-\dfrac{\log P}{\nu}$

বা, $Z=a_0+a_1 x,$

[$Z=\log V,\ \log K/\nu=a_0,\ -\dfrac{1}{\nu}=a_1,$

এবং, $x=\log P$ ধরে]

সারণী 12.4

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে $V^{\nu}=K$ সাযুজ্যরেখাটি নিরূপণ

P	V	$\log P = x$	$\log V = Z$	xZ	x^2	Z	$\hat{P}=$ antilog Z
0·5	1·62	−3·0103	·20952	−·06307	·09062	·21072	1·6245
1·0	1·00	0	0	0	0	−·0009	0·99795
1·5	0·75	·17609	−·12494	−·02260	·03101	−·12467	0·75046
2·0	0·62	·30103	−·20761	−·06250	·09062	−·21250	0·61305
2·5	0·52	·39794	−·28400	−·11301	·15836	−·28062	0·52405
3·0	0·46	·47712	−·33724	−·16090	·22764	−·33628	0·46102
		1·05115	−·74427	−·42148	·58925		

লক্ষ্য কর 12.4 সারণীর শেষ স্তম্ভটিতে V-এর আভাসিত মানগুলি দেওয়া হয়েছে। এগুলি V-এর সংশ্লিষ্ট লক্ষিত মানগুলির খুব কাছাকাছি। সুতরাং এক্ষেত্রে সাযুজ্যরেখাটি বেশ উপযুক্ত হয়েছে বলা চলে।

12.2.3 নির্বাচিত বিন্দু পদ্ধতি :

গাণিতিক সম্পর্কটি ঘাতজকে প্রকাশযোগ্য না হলে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি ব্যবহার করা সুবিধাজনক হয় না। যেমন,

$$Y = a + b^x \qquad \cdots (12.10a)$$

$$Y = A + B . e^{cx}$$
$$= a + qp^x \qquad \cdots (12.10b)$$

$$Y = K . g^{c^x} \qquad \cdots (12.10c)$$

$$Y = K . S^x . g^{c^x} \qquad \cdots (12.10d)$$

$$Y = \frac{L}{1 + e^{r(\beta - x)}} \qquad \cdots (12.10e)$$

—এই সম্পর্কগুলি ঘাতজক নয় এবং কোনরকম রূপান্তর সাধনের দ্বারাও এগুলিকে ঘাতজকে পরিণত করা যাবে না। এক্ষেত্রে সাযুজ্যরেখা নিরূপণের জন্য 'নির্বাচিত বিন্দু পদ্ধতিটি' (method of selected points) ব্যবহার করা যেতে পারে। সাযুজ্যরেখার যতগুলি ধ্রুবক আছে সেগুলির অনুমিত মান নির্ণয়ের জন্য মোট ততগুলি সমীকরণ প্রয়োজন। এই পদ্ধতিতে প্রথমে যতগুলি ধ্রুবক মোট ততজোড়া প্রদত্ত মান নির্বাচন করা হয় এবং সাযুজ্যরেখাটি এমনভাবে নিরূপিত হয় যেন নির্বাচিত এই সব প্রদত্ত মান-নির্দেশক বিন্দুগুলি রেখাটির উপরে অবস্থিত থাকে। এখানে প্রদত্ত মানগুলি এমনভাবে নির্বাচন করা হয় যেন সেগুলি প্রদত্ত সারণীতে মোটামুটি সমভাবে বিন্যস্ত থাকে। অর্থাৎ তিনজোড়া মান নেওয়ার প্রয়োজন হলে একজোড়া সারণীর প্রথম দিক থেকে, একজোড়া মাঝামাঝি জায়গা থেকে এবং তৃতীয় জোড়াটি নেওয়া হয় শেষের দিক থেকে। একটি উদাহরণ নেওয়া যাক। মনে কর 12.5 সারণীতে প্রদত্ত রাশিতথ্যের ওপর (12.10e) সাযুজ্যরেখাটি নিরূপণ করতে হবে। এখানে $X =$ বর্ষ এবং $Y =$ লোকসংখ্যা ধরা যাক।

তাহলে, $$Y = \frac{L}{1 + e^{r(\beta - x)}}$$

অর্থাৎ, $$\frac{1}{Y} = \frac{1}{L} + \frac{e^{r\beta}}{L} \cdot e^{-rx}$$

বা, $$Z = a' + b' q'^x$$
$$= a + bq^t. \quad \left[t = \frac{x - 1901}{10} \text{ ধরে} \right]$$

স্পষ্টতঃই t-এর বিভিন্ন মানগুলি হবে 0, 1, 2,..., 6.

সারণী 12.5

ভারতের জনসংখ্যা [1901—1961]

বর্ষ x	জনসংখ্যা y (কোটিতে)
1901	23·8
1911	25·2
1921	25·1
1931	27·9
1941	31·9
1951	36·1
1961	43·9

উৎস : Statistical Abstract of India, 1967.

a, b এবং q এই তিনটি ধ্রুবকের অনুমিত মান নির্ণয়ের জন্য $t=0$, $t=3$ এবং $t=6$ সম্পর্কিত মান তিনটি নেওয়া যাক। সুতরাং

$$a+bq^{0}=1/23\cdot8=\cdot042$$

$$a+bq^{3}=1/27\cdot9=\cdot036$$

$$a+bq^{6}=1/43\cdot9=\cdot023$$

অর্থাৎ, $b(1-q^{3})=\cdot006$ এবং $bq^{3}(1-q^{3})=\cdot013$

অর্থাৎ, $^{3}-\frac{\cdot013}{\cdot006}=2\cdot167$ বা $q=1\cdot294$;

সুতরাং $b=\frac{\cdot006}{1-2\cdot167}=-\frac{.006}{.833}=-\cdot007$

এবং $a=.042+.001=\cdot049$

সুতরাং সাযুজ্যরেখাটি $\frac{1}{Y}=\cdot049-\cdot007\times1\cdot294^{t}$. নীচের সারণীতে আভাসিত মানগুলি নিরূপিত হয়েছে।

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত মানগুলির অধিকাংশই অব্যবহৃত থেকে যায়, সাযুজ্যরেখাটি নিরূপিত হয় দুটি কিংবা তিনটি মানের ভিত্তিতে। সেইজন্য পদ্ধতিটি আদৌ নির্ভরযোগ্য নয়।

সারণী 12.6

ভারতের আভাসিত জনসংখ্যা [1901—1961]

বর্ষ x	y	$t=\frac{x-1901}{10}$	$Z=$ ·049 − ·007 × 1·294^t	1/(4) = আভাসিত জনসংখ্যা
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1901	23·8	0	·042	23·8
1911	25·2	1	·040	25·0
1921	25.1	2	·037	27·0
1931	27·9	3	·036	27·9
1941	31·9	4	·029	34·5
1951	36·1	5	·026	38·5
1961	43·9	6	·023	43·9

12.2.4 গোষ্ঠী-গড় পদ্ধতি (method of group averages) :

এই পদ্ধতিতে প্রথমে সাযুজ্যরেখায় যতগুলি ধ্রুবক আছে প্রদত্ত মানগুলিকে মোট ততগুলি গোষ্ঠীতে ভাগ করা হয়। প্রতিটি গোষ্ঠীতে পারতপক্ষে সমান-সংখ্যক মান নেওয়ার চেষ্টা করা হয়। অতঃপর এই সব গোষ্ঠীর গড়-নির্দেশক বিন্দুগুলির জন্য পাওয়া সমীকরণগুলি (লক্ষিত মান = আভাসিত মান) সমাধান ক'রে সাযুজ্যরেখাটি নিরূপিত হয়।

মনে কর 12.7 সারণীতে প্রদত্ত রাশিতথ্যের সম্পর্কে (12.10c) সাযুজ্যরেখাটি নিরূপণ করতে হবে। এখানে

$$Y=K\,.\,g^{c^x}$$

বা, $\log Y=\log K+c^x \log g$

বা, $Z=a+b.c^x$ ($Z=\log Y$, $a=\log K$, $b=\log g$)

এখানে সাযুজ্যরেখাটিতে 3টি ধ্রুবক আছে। সুতরাং প্রদত্ত মানগুলিকে মোট তিনটি গোষ্ঠীতে ভাগ করতে হবে।

$x'=x-30$ হলে $x'=0(1)\,20.$

সারণী 12.7

x	$y=l_x$	x	$y=l_x$
30	89675	41	81444
31	88984	42	80598
32	88284	43	79729
33	87575	44	78832
34	86856	45	77908
35	81627	46	76954
36	85385	47	75968
37	84629	48	74947
38	83859	49	73886
39	83073	50	72785
40	82267	—	—

মনে কর $S_0=\sum_{x'=0}^{7-1} Z_{x'}=7a+b(c^0+c'+\cdots+c^6)$

$$=7a+b\,\frac{c^7-1}{c-1}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1&=\sum_{x'=7}^{14-1} Zx'=7a+c^7b\,\frac{c^7-1}{c-1} \\ \text{এবং}\quad S_2&=\sum_{x'=14}^{21-1} Zx'=7a+c^{14}b\,\frac{c^7-1}{c-1} \end{aligned}\right\} \qquad (12.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{সুতরাং}\quad S_1-S_0&=b\frac{(c^7-1)^2}{c-1} \\ \text{এবং}\quad S_2-S_1&=b.c^7.\ \frac{(c^7-1)^2}{c-1} \end{aligned}\right\} \qquad (12.12)$$

অর্থাৎ, $\dfrac{S_2-S_1}{S_1-S_0}=c^7.$

y-এর মানগুলির লগ নিয়ে পাওয়া যায়

$$S_0=(\log 89675+\log 88984+\cdots+\log 85385)$$
$$=34{\cdot}5955661$$
$$S_1=(\log 84629+\log 83859+\cdots+\log 79729)$$
$$=34{\cdot}4045542$$

এবং $S_2=(\log 78832+\log 77908+\cdots+\log 72785)$
$$=34{\cdot}1605049$$

সুতরাং $\quad c^7=\dfrac{34{\cdot}1605049-34{\cdot}4045542}{34{\cdot}4045542-34{\cdot}595561}=1{\cdot}277665$

বা $\quad 7\log c=\log 1{\cdot}277665={\cdot}1064157$

বা $\quad \log c=0{\cdot}0152022=\log 1{\cdot}03562$

অর্থাৎ $\quad c=1{\cdot}03562$

c-এর মান (11.12) সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$b=\frac{(S_1-S_0)(c-1)}{(c^7-1)^2}=-0{\cdot}088253.$$

পুনরায়, (11·11) থেকে, $a=\dfrac{1}{7}\left\{S_1-c^7b\,\dfrac{c^7-1}{c-1}\right\}$

$$=5{\cdot}04050$$

সুতরাং সাযুজ্যরেখাটি

$\log Y=5{\cdot}04050+(-{\cdot}08825).\quad 1{\cdot}03562x'$

এই নিরূপিত রেখাটি থেকে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর আভাসিত মানগুলিও আগের মতো পাওয়া যায়।

12.3 তত্ত্বগত বিভাজন নিরূপণ : পরিঘাত পদ্ধতি :

নবম পরিচ্ছেদে আমরা লক্ষিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে চলের তত্ত্বগত বিভাজন নিরূপণের প্রশ্নটি আলোচনা করেছি। বস্তুতঃ চলটি অবিচ্ছিন্ন হলে এক্ষেত্রেও আমরা এক ধরনের সাযুজ্যরেখা নিরূপণের চেষ্টা করি। শ্রেণীমধ্যকের পরিসংখ্যা ঘনত্বকে শ্রেণীমধ্যকের ওপর নির্ভরশীল একটি চল হিসাবে ভাবা গেলে

আলোচ্য ক্ষেত্রে যে সাযুজ্যরেখাটি আমরা নিরূপণ করতে চাই তা হবে চলটির তত্ত্বগত বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব-রেখা। এখানে সাযুজ্যরেখার ধ্রুবকগুলি অর্থাৎ সম্ভাবনা ঘনত্বরেখার পূর্ণকাঙ্কগুলি এমনভাবে নির্ণয় করার চেষ্টা করা হয় যেন অঙ্কিত রেখার সঙ্গে লক্ষিত পরিসংখ্যা রেখার (প্রকৃতপক্ষে পরিসংখ্যা বহুভুজের) *যথাসম্ভব সাযুজ্যতা থাকে এবং বিভিন্ন শ্রেণীর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা* সংশ্লিষ্ট লক্ষিত পরিসংখ্যাগুলির যথাসম্ভব কাছাকাছি হয়।

এক্ষেত্রে পরিঘাত-পদ্ধতির (method of moments) সাহায্যে সংশ্লিষ্ট ধ্রুবকগুলির অনুমিত মান নির্ণয় করা হয়। মনে কর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষকে $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ এই k-সংখ্যক ধ্রুবক বর্তমান। প্রথমে চলটির $\mu'_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ এই k-টি তত্ত্বগত পরিঘাত নির্ণয় করা হয়—স্পষ্টতঃই এগুলির প্রত্যেকটি $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ সম্বলিত বিভিন্ন প্রকাশন। মনে কর লক্ষিত বিভাজনের সংশ্লিষ্ট পরিঘাতগুলির সংখ্যামান যথাক্রমে $m'_1, m_2 \ldots, m_k$. এখন

$$\left.\begin{aligned} \mu'_1 &= m'_1 \\ \mu_j &= m_j,\ j = 2(1)k \end{aligned}\right\} \qquad \cdots (12.13)$$

এই k-টি সমীকরণ যুগপৎ সমাধান ক'রে $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$-এদের অনুমিত মানগুলি নির্ণয় করে সাযুজ্যরেখাটি সম্পূর্ণরূপে চিহ্নিত করার পদ্ধতিকে বলা হয় পরিঘাত পদ্ধতি। তত্ত্বগত বিভাজনের k-টি পরিঘাত লক্ষিত বিভাজনের সংশ্লিষ্ট k-টি পরিঘাতের সমান হলে বিভাজন দুটির মধ্যে মোটামুটিভাবে সাযুজ্যতা রক্ষিত হবে, এই পদ্ধতিটির স্বপক্ষে যুক্তি। আসলে যে কোন k-টি তত্ত্বগত পরিঘাত সংশ্লিষ্ট লক্ষিত পরিঘাতগুলির সমান ধরে নিয়ে অনুমিত মানগুলি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র মাত্রার লক্ষিত পরিঘাতগুলির নির্ণয়ণ কম শ্রমসাপেক্ষ এবং এগুলি কম নমুনাজ চাঞ্চল্যের অধীন, এই বিবেচনায় নিম্নতম k-টি পরিঘাত সম্পর্কিত সমীকরণগুলিই নেওয়া হয়।

বিচ্ছিন্ন চলের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা-ভর-রেখার প্রশ্ন অবান্তর, তবে চলটির বিভিন্ন মানের প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা পাওয়ার উদ্দেশ্যে সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষকের পূর্ণকাঙ্কগুলির অনুমিত মান চলটির লক্ষিত বিভাজন থেকে পরিঘাত-পদ্ধতিতে নিরূপণ করা হয়।

অষ্টম পরিচ্ছেদে পরিঘাত পদ্ধতি ব্যবহারের কয়েকটি উদাহরণ আলোচিত হয়েছে।

12.4 চলমান গড়ের সাহায্যে রাশিতথ্যের মসৃণতা সাধন :

লক্ষিত রাশিতথ্যের মসৃণতা সাধন করার উদ্দেশ্যে কোনরূপ সাযুজ্যরেখা নিরূপণ না ক'রে চলমান গড়ের (moving avarage) সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। সাধারণতঃ কালীন সারির ক্ষেত্রেই পদ্ধতিটি ব্যবহার হয়।

একটি কালীন সারি থেকে k-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড় (k-point moving average) পেতে হলে প্রথমে সারির প্রথম k-টি মানের গড় নির্ণয় করা হয় এবং সেটি সংস্থাপন করা হয় এই k-টি বিন্দুর মাঝামাঝি জায়গায়। এর পর প্রথমবারে গৃহীত k-টি মানের প্রথমটি বাদ দেওয়া হয়, এবং পরবর্তী নতুন মানটি নেওয়া হয়। এই k-টি মানের গড় নির্ণয় ক'রে সেটি সংস্থাপন করা হয় সংশ্লিষ্ট k-টি বিন্দুর মাঝামাঝি। এইভাবে প্রতিবারে আগেরবারে নেওয়া মানগুলির প্রথমটি বাদ দেওয়া হয় এবং পরবর্তী নতুন মানটি অন্তর্ভুক্ত করা হয়। এইভাবে যে নতুন সারিটি পাওয়া যায় তাকে বলে k-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড়ের সারি।

সারণী 12.8

বর্ষ	সোনা উৎপাদন (কোটি আউন্সে)
1945	12·7
1946	10·1
1947	13·0
1948	13·2
1949	12·6
1950	14·2
1951	13·7

চলমান গড়ের সারিটি মূল সারির তুলনায় অনেকখানি বিচ্যুতিমুক্ত। এই পদ্ধতিতে মূল সারির সবকটি মানের জন্য বিচ্যুতিমুক্ত মান পাওয়া যায় না। k অযুগ্ম হলে সারির প্রথম $\frac{k-1}{2}$ টি এবং শেষের $\frac{k-1}{2}$ টি এবং k যুগ্ম হলে সারির

প্রথম $\frac{k}{2}$ টি ও শেষের $\frac{k}{2}$ টি মানের জন্য বিচ্যুতিমুক্ত মান পাওয়া যায় না। k যুগ্ম হলে চলমান গড়ের সারিটি মূলসারির সময়বিন্দুগুলির সহগামী করার জন্য পরবর্তী পর্যায়ে আর একবার দ্বি-বিন্দু-ভিত্তিক গড় নেওয়ার প্রয়োজন হয়।

উদাহরণ : উপরের সারণীতে 1945 সাল থেকে 1951 সাল পর্যন্ত পৃথিবীতে সোনা উৎপাদনের পরিমাণ দেওয়া আছে।

এই সারিটি থেকে 3-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড় নির্ণয় করা যাক।

সারণী 12.9

3-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড় নির্ণয়।

বৎসর	y	3-বিন্দু চলমান সমষ্টি	3-বিন্দু চলমান গড়
1945	12·7		
1946	10·1	35·8	11·9
1947	13·0	36·3	12·1
1948	13·2	38·8	12·9
1949	12·6	40·0	13·3
1950	14·2	40·5	13·5
1951	13·7		

লক্ষ্য কর এখানে প্রথম ও শেষ মানটির জন্য চলমান গড় পাওয়া যায়নি।

নীচের উদাহরণে k-র মান যুগ্ম হলে কীভাবে চলমান গড় নির্ণয় করা হয় দেখানো হয়েছে।

যদি k-র মান দেওয়া না থাকে তাহলে প্রদত্ত কালীন সারিটি ভালভাবে পরীক্ষা করলেই মসৃণতা সাধনের উদ্দেশ্যে k-র মান কত নিতে হবে সে সম্বন্ধে কিছুটা আঁচ পাওয়া যায়। কালীন সারিতে যে মানটি পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মান অপেক্ষা বৃহত্তর সেটিকে 'শিখর' (peak) বলা হয়। প্রদত্ত কালীন সারিতে পর পর দুটি শিখরের মধ্যে সময়ের ব্যবধান লক্ষ্য করা হয়। শিখর-বর্ষগুলি যদি সমান ব্যবধানে থাকে তাহলে k-র মান নেওয়া হয় এই সাধারণ ব্যবধানের সমান। আর শিখর-বর্ষগুলি সমান ব্যবধানে না থাকলে গড় ব্যবধানের পরিমাণটি নেওয়া হয় k-র মান হিসাবে। এ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা

কালীন সারি বিশ্লেষণ (analysis of time-series) প্রসঙ্গে পাওয়া যাবে (নির্দেশিকা 2 দ্রষ্টব্য)।

সারণী 12.10

4-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড়ের সাহায্যে রাশিতথ্যের মসৃণতা সাধন।

বৎসর	উৎপাদন (উপযুক্ত এককে)	4-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান সমষ্টি	তৃতীয় স্তম্ভের দ্বি-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান সমষ্টি	4-বিন্দু-ভিত্তিক চলমান গড় ((4)+8)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1901	506			
1902	620	2835		
1903	1036	2917	5752	719·00
1904	673	2993	5910	739·75
1905	588	3073	6066	758·25
1906	696	3183	6211	776·38
1907	1116	3213	6351	793·88
1908	738	3294	6507	813·38
1909	663	3367	6661	832·63
1910	777	3447	6814	851·75
1911	1189	3529	6976	872·00
1912	818	3597	7126	890·75
1913	745	3684	7281	910·13
1914	845	3764	7448	931·00
1915	1276			
1916	896			

পূর্ববর্তী উদাহরণে শিখর বর্ষগুলি হ'ল 1903, 1907, 1911, 1915। এদের মধ্যবর্তী ব্যবধানগুলি 4, 4 এবং 4—সুতরাং এখানে $k=4$ নেওয়া হয়েছে।

অনুশীলনী

12.1 রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধন বলতে কী বোঝ? মসৃণতাসাধনের পদ্ধতিগুলি সংক্ষেপে বর্ণনা কর।

12.2 সাযুজ্যরেখা কী? সাযুজ্যরেখা নিরূপণের উদ্দেশ্য বিস্তারিতভাবে আলোচনা কর।

12.3 সাযুজ্যরেখা নিরূপণের প্রচলিত পদ্ধতিগুলির একটি তুলনামূলক আলোচনা কর।

12.4 চলমান গড়ের সংজ্ঞা দাও। চলমান গড়ের সাহায্যে কীভাবে লব্ধ রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধন করা যায় বর্ণনা কর। পদ্ধতিটির সুবিধা-অসুবিধাগুলি কী কী?

12.5 লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত সারণীতে প্রদত্ত রাশিতথ্যের জন্য $Y=a+bX$ এই সরলরেখাটি নিরূপণ কর:

x	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5
y	106·38	109·00	113·0	113·0	115·1	119·1

একই রাশিতথ্যের জন্য $Y=a+bX+cX^2$ এই অধিবৃত্তটি নিরূপণ কর এবং উভয়ক্ষেত্রে Y-এর আভাসিত মানগুলির সঙ্গে লক্ষিত মানগুলির তুলনা কর।

রেখাদুটি লেখচিত্রে অঙ্কিত কর এবং লক্ষিত বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর।

12.6 সর্বভারতীয় পাইকারী মূল্যসূচী (1961-62=100) সংক্রান্ত নিম্নলিখিত রাশিতথ্যের জন্য একটি সরলরেখা নিরূপণ কর এবং লব্ধ আভাসিত মানগুলির সঙ্গে লক্ষিত মানগুলির তুলনা কর।

	1971 সাল						
	জানু	ফেব্রু	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন	জুলাই
মূল্যসূচী	183·3	181·4	181·6	182·2	182·1	184·8	187·9

উৎস: *Reserve Bank of India Bulletins.*

12.7 11.5 সারণীতে প্রদত্ত রাশিতথ্যের জন্য গোষ্ঠীগড় পদ্ধতিতে $Y=a+bq^t$ রেখাটি নিরূপণ কর এবং লক্ষিত মানগুলির সঙ্গে আভাসিত মানগুলির তুলনা কর।

12.8 চলমান গড় পদ্ধতিতে ভারতের শস্য উৎপাদনের সূচকসংখ্যা (1949-50 = 100) সংক্রান্ত নিম্নলিখিত রাশিতথ্যের মসৃণতাসাধন কর।

বর্ষ	সূচকসংখ্যা	বর্ষ	সূচকসংখ্যা
1950-51	90·3	59-60	128·9
51-52	91·2	60-61	138·3
52-53	110·4	61-62	143·1
53-54	120·1	62-63	132·3
54-55	114·5	63-64	140·8
55-56	114·9	64-65	153·7
56-57	119·9	65-66	124·2
57-58	108·3	66-67	129·5
58-59	129·8	67-68	165·1

নির্দেশিকা

1. Croxton, F. E. & Cowden, D. J. *Applied General Statistics.* Prentice Hall, 1964.

2. Goon, A. M., Gupta M. K. & Dasgupta. B. *Fundamentals of Statistics, Vol. 2.* World Press, 1972.

3. Kenney, J. F. & Keeping, E. S. *Mathematics of Statistics, Part I.* Van Nostrand, 1954.

4. Mills, F. C. *Statistical Methods.* H. Holt, 1955.

5. Szulc, S. *Statistical Method.* Pragamon Press, 1945.

13 নমুনাজ বিভাজন
(Sampling Distribution)

13.1 পূর্ণক ও নমুনা (Population and Sample)

পরীক্ষা নিরীক্ষার অন্তর্গত ব্যষ্টিসমূহকে সর্বসাকুল্যে বলা হয় পূর্ণক বা সমগ্রক। কোন কোন ক্ষেত্রে পূর্ণকের প্রতি সদস্যের নিরীক্ষণ সম্ভব—একে বলা হয় পূর্ণাঙ্গ পর্যবেক্ষণ (complete enumeration); কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই বিভিন্ন অসুবিধার জন্য এরূপ নিরীক্ষণ সম্ভব নয়। এমন হতে পারে যে, পূর্ণকের আয়তন এত বিশাল যে তজ্জন্য যত পর্যবেক্ষণ প্রয়োজন তাদের পরিচালনা করা অসম্ভব হয়ে পড়ে, কিংবা পূর্ণাঙ্গ পর্যবেক্ষণ এত বেশী ব্যয়সাপেক্ষ বা সময়সাপেক্ষ যে তা অনুমোদন করা অসমীচীন, অথবা পরীক্ষাটি ধ্বংসাত্মক—তাই পূর্ণকের সকল সদস্যের বিসর্জন সম্ভবপর নয়, যথা কোন বিজলী বাতির জীবনসীমা নির্ধারণ করার অর্থই বাতিটির ধ্বংসসাধন। আবার এমনও হতে পারে যে, পূর্ণকের অস্তিত্বই নেই, যেমন একটি মুদ্রার সম্ভবপর নিক্ষেপণের দ্বারা উৎপন্ন মৌলিক ঘটনার অনুমানসাপেক্ষ (hypothetical) অসীম পূর্ণক। এসব ক্ষেত্রে পূর্ণকের কোনও অংশবিশেষের সমস্ত সদস্যের পরীক্ষালব্ধ তথ্য নিয়েই সন্তুষ্ট থাকা ছাড়া কোন উপায় থাকে না। পূর্ণকের এরূপ অংশের নাম নমুনা এবং এই প্রক্রিয়ার নাম নমুনা সমীক্ষা (sample survey)। এ প্রসঙ্গে এই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়টি মনে রাখতে হবে যে, নমুনাটি যেন পূর্ণকের প্রতিনিধিত্ব করে, কারণ আমরা পূর্ণকের সম্পূর্ণ নিরীক্ষণেই উৎসাহী ছিলাম, কিন্তু তা সম্ভবপর হয় নি। বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্নপ্রকার নমুনার উল্লেখ করা গেলেও সমসম্ভব নমুনাই (random sample) বিশেষ কার্যকরী।

13.2 বিভিন্ন প্রকার নমুনা-চয়ন পদ্ধতি (Different types of sampling)

পূর্বেই বলা হয়েছে যে নমুনার পক্ষে অনুরূপ পূর্ণকের প্রতিনিধিত্ব করা একান্তই বাঞ্ছনীয়। উপরন্তু, যদি পূর্ণকের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের (characteristics) সাথে নমুনার অনুরূপ বৈশিষ্ট্যের তারতম্য প্রদর্শন করান নমুনার পক্ষে সম্ভবপর

হয়, তবে খুবই ভাল। একথা মনে রেখে নীচে কয়েকটি সাধারণ নমুনা সংগ্রহের বিষয় আলোচনা করা হ'ল।

প্রথমেই সম্ভাবনাশ্রয়ী নমুনা সংগ্রহের (probability sampling) নাম করা যেতে পারে। এতে পূর্ণকের প্রতি সদস্যের নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার একটি বিশেষ সম্ভাবনা থাকে। সবচেয়ে সহজ ও সবচেয়ে বেশী ব্যবহৃত সম্ভাবনাশ্রয়ী নমুনা চয়নের নাম 'সরল সমসম্ভব নমুনা চয়ন' (simple random sampling) বা সংক্ষেপে কেবলমাত্র 'সমসম্ভব নমুনা চয়ন' (random sampling)—এ ক্ষেত্রে পূর্ণকের প্রতিটি সদস্যের নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার সম্বাভনা সমান থাকে। নমুনাতে সদস্যদের অন্তর্ভুক্তি করণের ধারা অনুসারে এই সমসম্ভব নমুনা চয়ন দুই প্রকারের হতে পারে, যথা পুনঃস্থাপনাসহ সমসম্ভব নমুনা চয়ন (random sampling with replacement) ও পুনঃস্থাপনাবিহীন সমসম্ভব নমুনা চয়ন (random sampling without replacement)।

ধরা যাক পূর্ণকের সদস্যসংখ্যা N এবং নমুনার সদস্যসংখ্যা n. পুনঃস্থাপনাসহ সমসম্ভব নমুনা চয়নের ক্ষেত্রে পূর্ণক হতে একটি একটি ক'রে সদস্য নিতে হবে এবং প্রতিবার এভাবে নেবার পর নমুনায় নির্বাচিত সদস্যকে পূর্ণকে ফিরিয়ে দিতে হবে। এতে প্রতিবার নেবার সময় পূর্ণকের N সদস্যের প্রতিটির নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার একই সম্ভাবনা $\frac{1}{N}$ হয়। পুনঃস্থাপনাবিহীন সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রেও পূর্ণক হতে একটি একটি ক'রে সদস্য নিতে হবে, কিন্তু নেবার পর নমুনায় নির্বাচিত সদস্যকে কখনই পূর্ণকে ফিরিয়ে দেওয়া হবে না। এক্ষেত্রে প্রতিবার নেবার সময় পূর্ণকে অবস্থিত বাকী সদস্যদের প্রতিটির নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার সম্ভাবনা সমান থাকে; উদাহরণস্বরূপ, k-তম বার নেবার সময় বাকী $N-k+1$ সদস্যের প্রত্যেকের নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার সম্ভাবনা হবে $\frac{1}{N-k+1}$। (অবশ্য) এ ক্ষেত্রেও যে কোনবার, ধরা যাক k-তম বারে, নেবার সময় কোনও একটি নির্দিষ্ট সদস্যের নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হবার সম্ভাবনা $\frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdots\cdots \frac{N-k+1}{N-k+2} \cdot \frac{1}{N-k+1}$ অর্থাৎ $\frac{1}{N}$।

লক্ষ্য করা যেতে পারে প্রথমক্ষেত্রে সম্ভবপর নমুনার সংখ্যা (নমুনাতে সংগৃহীত সদস্যদের বিন্যাস বিবেচনা ক'রে) N^n এবং প্রতিটি নমুনার ঘটবার সম্ভাবনা

$\frac{1}{N^n}$। দ্বিতীয়ক্ষেত্রে সম্ভবপর নমুনার সংখ্যা (নমুনাতে সংগৃহীত সদস্যদের বিন্যাস অগ্রাহ্য করে) $\binom{N}{n}$ এবং প্রতিটি নমুনার ঘটবার সম্ভাবনা $\frac{1}{\binom{N}{n}}$।

এটা অবশ্য স্পষ্ট যে, পূর্ণক থেকে n-সংখ্যক সদস্য যদি একবারে এমনভাবে নেওয়া হয় যে n সদস্যসমন্বিত সম্ভবপর সকল নমুনারই নির্বাচিত হবার একই সম্ভাবনা থাকে তা হলেও পুনঃস্থাপনাবিহীন সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হবে। পূর্বের ন্যায় এক্ষেত্রেও সম্ভবপর নমুনার সংখ্যা $\binom{N}{n}$ এবং প্রতিটি নমুনার ঘটবার সম্ভাবনা $\frac{1}{\binom{N}{n}}$.

যখন পূর্ণকের আয়তন অসীম তখন অবশ্য পুনঃস্থাপনাসহ ও পুনঃস্থাপনা-বিহীন সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের মধ্যে কার্যতঃ কোন প্রভেদ থাকে না, কারণ নমুনা আহরণের সময় পূর্ণকের উপাদানের বস্তুতঃ কোন পরিবর্তন ঘটে না।

13.3 পূর্ণকাঙ্ক ও নমুনাঙ্ক (Parameter and Statistic) :

সাধারণতঃ যাবতীয় রাশিবিজ্ঞানসম্মত পর্যালোচনায় আমরা পূর্ণকের কোনও একটি বা একাধিক বিশেষ লক্ষণের বিষয় জানতে আগ্রহী হই, কিন্তু পূর্বেই বলা হয়েছে যে নানাবিধ কারণে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই আমরা পূর্ণক থেকে সংগৃহীত কোন একটি নমুনার অনুরূপ লক্ষণের বিষয়ই কেবলমাত্র জানতে পারি, কারণ আমরা কেবলমাত্র এই নমুনাটিকেই পর্যালোচনা করতে পারি।

পূর্ণকের সকল সদস্যের ভিত্তিতে প্রাপ্ত সেই লক্ষণের রাশিবিজ্ঞানসম্মত পরিমাপকে (যেটি প্রায়ই অজানা থাকে) বলা হয় পূর্ণকাঙ্ক, পক্ষান্তরে নমুনালব্ধ অনুরূপ পরিমাপকে বলা হয় নমুনাঙ্ক। সুতরাং নমুনাঙ্ক নমুনাজ অবেক্ষণসমূহের (observations) একটি অপেক্ষক (function) মাত্র, যা সংশ্লিষ্ট পূর্ণকাঙ্কের একটি প্রাক্কলনীমাপ বিশেষ (estimate)। এটি খুবই সহজবোধ্য যে পূর্ণকাঙ্কের প্রাক্কলনীমাপ হিসাবে একই আয়তনের বিভিন্ন নমুনার উপর নির্ভর ক'রে প্রচুর নমুনাঙ্ক সংগৃহীত হতে পারে। বিভিন্ন নমুনায় পূর্ণকের বিভিন্ন সদস্য অন্তর্ভুক্ত হয় বলে এ-সমস্ত নমুনাঙ্কের মধ্যে পার্থক্য থাকাও খুবই স্বাভাবিক—এই পার্থক্যকে বলা যায় নমুনাজ চাঞ্চল্য—(sampling fluctuation)। বিভিন্ন আয়তনের নমুনার ক্ষেত্রে এ পার্থক্য তো আরও স্বাভাবিক।

একটি উদাহরণ নেওয়া যাক। ধরা যেতে পারে আমরা বিশ্ববিদ্যালয়ের কোনও একটি বিশেষ পরীক্ষায় সমাগত ছাত্রদের গড় ওজন জানতে ইচ্ছুক। এরূপ সমস্ত ছাত্রের সমাহারকে বলা হবে পূর্ণক এবং সেই ঈপ্সিত কিন্তু অজ্ঞাত গড় ওজনকে বলা হবে পূর্ণকাঙ্ক। আমরা এই পূর্ণক থেকে সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করতে পারি এবং এই নমুনায় আগত ছাত্রদের গড় ওজন নিরূপণ করতে পারি। নমুনাজ এই গড় ওজনকে বলা হবে নমুনাঙ্ক এবং এটাই হবে পূর্ণকের অজানা গড় ওজনের প্রাক্কলনীমাপ। পূর্ণক থেকে প্রচুর নমুনা সংগ্রহ ক'রে প্রতি ক্ষেত্রেই গড় ওজন নির্ধারণ করা যেতে পারে। এই সবকটি গড় ওজনই পূর্ণকের একই অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্কের এক একটি প্রাক্কলনীমাপ হবে।

13.4 নমুনাজ বিভাজন (Sampling Distribution) :

যে কোনও পূর্ণক থেকে সম-আয়তনের একাধিক নমুনা চয়ন ক'রে প্রতি নমুনা থেকে নমুনাঙ্ক নিরূপণ করা যেতে পারে। বস্তুতঃ এই নমুনাঙ্কের সংখ্যা হতে পারে অসীম। এই সমস্ত নমুনাঙ্কের পরিসংখ্যা বিভাজনকে বলা হয় নমুনাজ বিভাজন বা নমুনাজ নিবেশন।

পূর্ণকের প্রকৃতি জানা থাকলে পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে অনেক সময় সম্ভাবনাতত্ত্বের উপর নির্ভর ক'রে কোন নমুনাঙ্কের নমুনাজ বিভাজন উপপত্তিগতভাবেই নির্ণয় করা যেতে পারে। (অনুচ্ছেদ 13.7 ও 13.8 দ্রষ্টব্য।)

যে কোন বিভাজনের মতো নমুনাজ বিভাজনেরও গড়, প্রমাণবিচ্যুতি, পরিঘাত ইত্যাদি থাকতে পারে। তন্মধ্যে গড় ও প্রমাণবিচ্যুতি বিশেষভাবে উল্লেখ-যোগ্য। নমুনাঙ্কের গড়কে বলা হয় প্রত্যাশা, নমুনাঙ্কের প্রমাণ-বিচ্যুতিকে বলা হয় প্রমাণ ভ্রান্তি বা সমক ভ্রান্তি (standard error)।

13.5 বিচ্ছিন্ন চলসংক্রান্ত বিভাজন (Distributions associated with discontinuous variables) :

ধরা যাক n-সংখ্যক সম্ভাবনাশ্রয়ী বিচ্ছিন্ন চল $x_1, x_2, \ldots, x_n$ দ্বারা সূচিত হচ্ছে এবং $y = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ যেন চলগুলির একটি অপেক্ষক যার বিভাজন নিরূপণ করতে হবে।

$$P[y=k] = \sum_{\phi(k_1, k_2, \ldots, k_n)=k} P[x_i = k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n]$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে

$$P[x_i = k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n] = \prod_{i=1}^{n} P[x_i = k_i]$$

সুতরাং সে ক্ষেত্রে

$$P[y = k] = \sum_{\phi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = k} \prod_{i=1}^{n} P[x_i = k_i]$$

এই প্রক্রিয়া অবলম্বনে কয়েকটি প্রাথমিক বিভাজন নীচে দেখান হচ্ছে।

13.5.1 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ বিভাজন :

ধরা যাক x_1 একটি m_1 ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল এবং x_2 অপর একটি m_2 ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল অর্থাৎ x_1 ও x_2-এর সম্ভাবনা ভর অপেক্ষক যথাক্রমে

$$\binom{m_1}{x_1}(1-p)^{m_1 - x_1} p^{x_1} \text{ ও } \binom{m_2}{x_2}(1-p)^{m_2 - x_2} p^{x_2}$$

x_1 ও x_2-কে পরস্পর নিরপেক্ষ ধরে নিয়ে,

$y = x_1 + x_2$-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

বস্তুতঃ $P[x_1 = k_1] = \begin{cases} \binom{m_1}{k_1}(1-p)^{m_1 - k_1} p^{k_1}, & \text{যখন } k_1 = 0, 2, 1, \ldots, m_1 \\ 0 & \text{, অন্যথায়} \end{cases}$

এবং $\begin{cases} \binom{m_2}{k_2}(1-p)^{m_2 - k_2} p^{k_2}, & \text{যখন } k_2 = 0, 1, 2, \ldots m_2 \\ 0 & \text{, অন্যথায়} \end{cases}$

এখন

$$\begin{aligned} P[y = k] &= \sum_{k_1 + k_2 = k} P[x_1 = k_1,\ x_2 = k_2] \\ &= \sum_{k_1 + k_2 = k} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}(1-p)^{m_1 + m_2 - k_1 - k_2} p^{k_1 + k_2} \\ &= \left\{\sum_{k_1 + k_2 = k} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\right\}(1-p)^{m_1 + m_2 - k} p^k \\ &= \binom{m_1 + m_2}{k}(1-p)^{m_1 + m_2 - k} p^k. \end{aligned}$$

যখন $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, m_1 + m_2$.

[যেহেতু $\sum_{k_1+k_2=k} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2} = (1+t)^{m_1}(1+t)^{m_2}$ তে t^k-এর সহগ

অর্থাৎ $(1+t)^{m_1+m_2}$ তে t^k-এর সহগ অর্থাৎ $\binom{m_1+m_2}{k}$]

আর যখন $k \neq 0, 1, 2, \ldots, m_1+m$, তখন $P[y=k]=0$.

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, যথাক্রমে m_1 ও p এবং m_2 ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ তুইটি দ্বিপদ চলের যোগফল m_1+m_2 ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল হবে।

এই ফলটি x_1+x_2 ও x_3-এর যোগফল অর্থাৎ $x_1+x_2+x_3$-এর উপরও প্রযোজ্য। আবার এটি $x_1+x_2+x_3$ ও x_4-এর যোগফল অর্থাৎ $x_1+x_2+x_3+x_4$-এর উপরও প্রযোজ্য। এভাবে দেখান যায় যে এই ফলটি $x_1+x_2+\cdots x_n$-এর উপরও প্রযোজ্য। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, $x_i(i=1, 2,\ldots, n)$, $m_i(i=1, 2,\ldots, n)$ ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ চল হলে অনেক সময় $x_i(i=1, 2,\ldots, n)$-এর শর্তাধীন বিভাজন নির্ণয় করতে হয়, এই শর্তে যে

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i\text{-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে।}$$

এখন যদি $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ হয়, তবে

$$P[x_i=k_i, i=1, 2,\ldots, n \mid y=k]$$

$$= \frac{P[x_i=k_i,\ i=1, 2\ldots, n]}{P[y=k]}$$

$$= \frac{\prod_{i=i}^{n} \binom{m_i}{k_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{n} k_i}\, p^{\sum_{i=1}^{n} k_i}}{\binom{\sum_{i=1}^{n} m_i}{k}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} m_i - k}\, p^k}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{m_i}{k_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} m_i-k}\,p^k}{\binom{\sum_{i=1}^{n} m_i}{k}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} m_i-k}\,p^k} \quad \left[\text{যেহেতু } \sum_{i=1}^{n} k_i=k\right]$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{m_i}{k_i}}{\binom{\sum_{i=1}^{n} m_i}{k}}$$

$n=2$ হলে এটি একটি m_1+m_2, m_1 ও k পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত অতি গুণোত্তর (Hypergeometric) বিভাজন। $n>2$ হলেও এটি সাধারণীকৃত (generalised) অতিগুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

13.5.2. দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ বিভাজন :

ধরা যাক x_1 একটি λ_1 পূর্ণকাঙ্ক বিশিষ্ট পোয়াসঁ চল এবং x_2 অপর একটি λ_2 পূর্ণকাঙ্ক বিশিষ্ট পোয়াসঁ চল।

x_1 ও x_2-কে পরস্পর নিরপেক্ষ ধরে নিয়ে $y=x_1+x_2$-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

বস্তুত: $$P[x_1=k_1]=\begin{cases} e^{-\lambda_1}\dfrac{\lambda_1^{k_1}}{k_1\,!} & \text{, যখন } k_1=0, 1, 2, \ldots\ldots \\ 0 & \text{, অন্যথায়}\end{cases}$$

এবং $$P[x_2=k_2]=\begin{cases} e^{-\lambda_2}\dfrac{\lambda_2^{k_2}}{k_2\,!} & \text{, যখন } k_2=0, 1, 2,. \\ 0 & \text{, অন্যথায়}\end{cases}$$

এখন $$P[y=k]=\sum_{k_1+k_2=k} P[x_1=k_1, x_2=k_2]$$

$$=\sum_{k_1+k_2=k} e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1\,!}\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2\,!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\sum_{k_1+k_2=k}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1\,!}\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2\,!}\right)$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\left(\sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\right)$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

যখন $k=0, 1, 2,\ldots$

আর যখন $k \neq 0, 1, 2,\ldots$, তখন $P[y=k]=0$.

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে λ_1 ও λ_2 পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ চলের যোগফল $\lambda_1+\lambda_2$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পোয়াসঁ চল হবে।

এই ফলটি x_1+x_2 ও x_3-এর যোগফল অর্থাৎ $x_1+x_2+x_3$-এর উপরও প্রযোজ্য। আবার এটি $x_1+x_2+x_3$ ও x_4-এর যোগফল অর্থাৎ $x_1+x_2+x_3+x_4$-এর উপরও প্রযোজ্য। এভাবে দেখান যায় এই ফলটি $x_1+x_2+\cdots+x_n$-এর উপরও প্রযোজ্য।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যেতে পারে যে x_i $(i=1, 2,\ldots, n)$, λ_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ চল হলে অনেক সময় $x_i(i=1, 2,\ldots, n)$-এর সর্তাধীন বিভাজন নির্ণয় করতে হয়, এই সর্তে যে $y=\sum_{i=1}^{n} x_i$-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে।

এখন যদি $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ হয় তবে

$$P[x_i=k_i,\ i=1, 2,\ldots, n \,|\, y=k]$$

$$= \frac{P[x_i=k_i,\ i=1, 2,\ldots, n]}{P[y=k]}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}}{\dfrac{e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^k}{k!}}$$

$$= \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}}{\dfrac{e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^k}{k!}}$$

$$= \frac{k\,!}{\prod_{i=1}^{n}(k_i\,!)} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \right)^{k_i}.$$

$n=2$ হলে এটি একটি k ও $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ বিভাজন। $n>2$ হলে এটি k ও $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$, $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত বহুপদ বিভাজন (multinomial distribution) (অনুচ্ছেদ 15.6 দ্রষ্টব্য)।

13.6 অবিচ্ছিন্ন চল-সংক্রান্ত বিভাজন (Distributions associated with continuous variables) :

একটিমাত্র সম্ভাবনাশ্রয়ী অবিচ্ছিন্ন চলের বিষয় ধরা যাক। ধরলাম x একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী অবিচ্ছিন্ন চল যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ ও যার বিভাজন $df=f(x)\,dx$ এবং $y=\phi(x)$ যেন x-এর একটি অপেক্ষক যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বা বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

ধরলাম $y=\phi(x)$ রূপান্তরে x ও y-এর মধ্যে একৈক পারম্পর্য (one-to-one correspondence) বর্তমান। আরও ধরলাম $x=\psi(y)$ যেন উপর্যুক্ত রূপান্তরের বিবর্ত রূপান্তর এবং $\frac{d}{dy}\psi(y)$ অর্থবহ ও অবিচ্ছিন্ন।

ধরা যাক y-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $g(y)$.

এখন x ও y-এর মধ্যে একৈক পারম্পর্য বর্তমান থাকায়

$P[a<x<b]=P[\phi(a)<y<\phi(b)]$ যখন y, x-এর একটি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক

এবং $\qquad =P[\phi(b)<y<\phi(a)]$ যখন y, x-এর একটি ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক

আবার $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\left\{\varphi(y)\right\} \frac{dx}{dy}\,dy$$
$$= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\left\{\psi(y)\right\} \frac{d\varphi(y)}{dy}\,dy$$

সুতরাং প্রথম ক্ষেত্রে $g(y)=f\{\psi(y)\}\,\frac{d\varphi(y)}{dy}$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $g(y) = -f\{\psi(y)\}\dfrac{d\psi(y)}{dy}$

অর্থাৎ সাধারণভাবে $g(y) = f\{\psi(y)\}\left|\dfrac{d\psi(y)}{dy}\right|$

অর্থাৎ $\qquad = f\{\psi(y)\}|J|$

যেখানে $\qquad J = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d\psi(y)}{dy}$

এথেকে এটাই প্রতীয়মান হয় যে x-এর বিভাজন থেকে $y = \phi(x)$-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হলে x ও dx-কে অপসৃত ক'রে y ও dy আনতে হবে। এক্ষেত্রে জ্যাকোবিয়ানের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান গ্রহণ করতে হবে।

অনুরূপভাবে একাধিক অবিচ্ছিন্নচলের বিষয়টিও আলোচনা করা যেতে পারে।

ধরা যাক $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-সংখ্যক অবিচ্ছিন্ন চল যাদের যৌথ বিভাজন $df = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ এবং নতুন অবিচ্ছিন্ন চল $y_1, y_2, \ldots, y_n$ পুরানো অবিচ্ছিন্ন চলগুলির সহিত নিম্নলিখিত রূপান্তর দ্বারা সম্বন্ধযুক্ত।

$$y_i = \phi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

পূর্বের মতো অনুরূপ সর্তের উপস্থিতিতে আরও ধরলাম যে বিবর্ত রূপান্তর যেন

$$x_i = \varphi_i\,(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ হয়।}$$

ধরা যাক $y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর যৌথ বিভাজন হচ্ছে

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

পূর্বের মতই প্রমাণ করা যায় যে,

$$g\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)|J|$$

যেখানে

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \ldots & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} \ldots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

বা,
$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(y_1, y_2,\ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2\ldots, x_n)}$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ $x_1, x_2,\ldots, x_n$-এর বিভাজন থেকে $y_1, y_2,\ldots, y_n$-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হলে $x_1, x_2,\ldots, x_n$ এবং $dx_1, dx_2,\ldots, dx_n$-কে অপসৃত ক'রে $y_1, y_2, \ldots, y_n$ এবং $dy_1, dy_2,\ldots dy_n$-কে আনতে হবে। পূর্বের মতো এক্ষেত্রেও জ্যাকোবিয়ানের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান গ্রহণ করতে হবে।

এই প্রক্রিয়া অবলম্বনে কয়েকটি প্রাথমিক বিভাজন নীচে দেখান হচ্ছে।

13.6.1 নর্ম্যাল চলের ঋজুরৈখিক অপেক্ষকের বিভাজন :

যদি x নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে যার গড় μ ও ভেদমান σ^2, তবে $y=a+bx$ (যেখানে $b \neq 0$)-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

x-এর বিভাজন
$$dF=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$$

এখন $y=a+bx.$

সুতরাং $x=\frac{y-a}{b}.$

$$dx=\frac{dy}{b}, \text{ অর্থাৎ এ ক্ষেত্রে } |J|=\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{|b|}$$

সুতরাং y-এর বিভাজন
$$dF=\frac{1}{|b|\,\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-a}{b}\right)^2}\,dy$$
$$\frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2b^2\sigma^2}(y-a-b\mu)^2}\,dy$$

তাই প্রমাণিত হ'ল যে, $y=a+bx$-এর বিভাজন $N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$, অর্থাৎ y-এর বিভাজন গড় $a+b\mu$ ও ভেদমান $b^2\sigma^2$ বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন হবে।

13.6.2. নর্ম্যাল চলের সঙ্গে প্রতিলম্ব রূপান্তর (orthogonal transformation) দ্বারা সংযুক্ত চলের বিভাজন :

যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ গড় 0 ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ ক'রে এবং যদি $y_1, y_2, \ldots, y_n$ আগের চলগুলির সঙ্গে প্রতিলম্ব রূপান্তর দিয়ে সংযুক্ত হয় (পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য), তবে $y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

$x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp.\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\prod_{i=1}^{n} dx_i.$$

এখন $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এবং $y_1, y_2, \ldots, y_n$ প্রতিলম্ব রূপান্তরের মাধ্যমে সংযুক্ত।

$$\text{সুতরাং,}\quad \sum_{i=1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \text{ এবং } \prod_{i=1} dx_i = \prod_{i=1} dy_i$$

কারণ প্রতিলম্ব রূপান্তরের ক্ষেত্রে $|J|=1$.

সুতরাং $y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]\prod_{i=1}^{n} dy_i$$

তাই প্রমাণিত হ'ল যে, y_i-গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ এবং y_i-এর বিভাজন $N(0, \sigma^2)$; অর্থাৎ y_i-এর বিভাজন গড় 0 ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন হবে, $i=1, 2, \ldots, n$।

13.6.3 পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চলসমূহের ঋজুরৈখিক অপেক্ষকের বিভাজন :

যদি x_i গড় μ_i ও ভেদমান $\sigma_i^2 (i=1, 2, \ldots, n)$, বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে $z=a+\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ (যেখানে অন্ততঃ একটি b-এর মান 0 নয়) এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

$x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right]\prod_{i=1}^{n} dx_i.$$

ধরা যাক $y_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

সুতরাং $dy_i = \frac{dx_i}{\sigma_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

সুতরাং $y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]\prod_{i=1}^{n} dy_i$$

পুনরায় $z = a + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

$$= a + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mu_i + \sigma_i y_i)$$

$$= a + \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\sigma_i y_i$$

আবার ধরা যাক $z' = z - a - \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i$

এবং $z_1 = \frac{z'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}}$

সুতরাং, $z_1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}}\, y_i$

$= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n$

(যেখানে $c_{11}^2 + c_{12}^2 + \cdots + c_{1n}^2 = 1$)

তারপর আবার ধরা যাক

$$z_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$z_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$z_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n$$

যেখানে c_{ij}, $i=2, 3,\ldots n$; $j=1, 2,\ldots,n$-এর মান এমন নেওয়া হ'ল যেন

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots\ldots c_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_{n1} & c_{n2}\ldots\ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

একটি প্রতিলম্ব ম্যাট্রিক্স হয়, অর্থাৎ $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = 1$

$$\text{ও} \sum_{j \neq j'=1}^{n} c_{ij}c_{ij'} = 0, \; i=1, 2,\ldots, n$$

এখন $z_1, z_2,\ldots, z_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right] \prod_{i=1}^{n} dz_i$$

$$\left(\text{যেহেতু} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \;\text{ও}\; \prod_{i=1}^{n} dy_i = \prod_{i=1}^{n} dz_i\right)$$

সুতরাং $z_1, z_2,\ldots,z_n$-এর বিভাজন পরস্পর নিরপেক্ষ, প্রতিটি নর্ম্যাল এবং এদের প্রত্যেকের গড় 0 ও ভেদমান 1।

বিশেষতঃ z_1-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp[-\tfrac{1}{2}z_1^2]\, dz_1$$

এখন
$$z_1 = \frac{z - a - \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}}$$

সুতরাং $dz_1 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}$

তাই z-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(z-a-\sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}\right]dz$$

অর্থাৎ z এর বিভাজন $N\left(a+\sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2\right)$

$-\infty$ থেকে $+\infty$ পর্যন্ত z-এর উপর সমাকলন ক'রে বা সাধারণ নর্ম্যাল বিভাজনের সঙ্গে তুলনা ক'রে ধ্রুবকের মান নির্ণয় করার পর z-এর বিভাজনের সম্পূর্ণ রূপটি দাঁড়ায়

$$dF = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}\ \sqrt{2\pi}}$$

$$\times \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(z-a-\sum_{i=1}^{n} b_i\mu_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2}\right]dz$$

অনুসিদ্ধান্ত : $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ যদি গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনা হয় (স্পষ্টতঃই অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ) তবে $\bar{x}$-এর বিভাজন হবে $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, কারণ,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}x_n$$

একটি ঋজুরৈখিক অপেক্ষক এবং এখানে $a=0$, $b_i = \frac{1}{n}(i=1. 2, \ldots, n)$; আবার $\mu_i = \mu$ ও $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ ।

13.6.4 χ^2-বিভাজন :

যদি x_i গড় μ_i ও ভেদমান σ_i^2 $(i=1, 2,\ldots, n)$ বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ ক'রে এবং যদি তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

এর বিভাজন নির্ণয় করতে কবে।

n সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ প্রমাণ নর্ম্যাল চলের বর্গসমষ্টিকে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা-যুক্ত χ^2(χ^2 with n degrees of freedom) বলে।

$x_1, x_2,\ldots, x_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right]\prod_{i=1}^{n} dx_i$$

ধরা যাক $y_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$ $\quad (i=1, 2,\ldots, n)$

সুতরাং $dy_i = \frac{dx_i}{\sigma_i}$ $\quad (i=1, 2,\ldots, n)$

তাই $y_1, y_2,\ldots, y_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]\prod_{i=1}^{n} dy_i$$

এখন নীচের কৌণিক রূপান্তর প্রয়োগ করা হ'ল :

$$y_1 = \chi \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots\cdots\cdots \cos\theta_{n-1}$$
$$y_2 = \chi \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots\cdots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}$$
$$y_3 = \chi \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots\cdots \cos\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}$$

$$y_{n-1} = \chi \cos\theta_1 \sin\theta_2$$
$$y_n = \chi \sin\theta_1$$

যেখানে $0 < \chi < \infty,\ \frac{-\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2} (i=1, 2,\ldots, n-2),$

$$-\pi < \theta_{n-1} < \pi$$

তা হলে দেখা যায় যে

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \chi^2 \text{ এবং } |J| = \chi^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \cdots\cdots \cos\theta_{n-2}$$

সুতরাং x ; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \chi^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-2}\, d\chi \prod_{i=1}^{n-1} d\theta_i$$

এর থেকেই দেখা যায় যে χ ; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ চলগুলি পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নিবেশিত।

বিশেষতঃ χ^2-এর ধনাত্মক বর্গমূল χ-এর বিভাজন হ'ল

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \chi^{n-1} d\chi$$

এবং χ^2-এর নিজের বিভাজন হ'ল

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] (\chi^2)^{(n-2)/2} d\chi^2$$

উভয় বিভাজনেরই ধ্রুবক সহজে নির্ণয় করা যায়, যথা

(*i*) x-এর বিভাজন

$$dF = C_1 \exp[-\chi^2/2]\, \chi^{n-1} dx \qquad (\text{ধ্রুবককে } C_1 \text{ ধরিয়া})$$

সুতরাং $1 = \int_0^\infty dF = C_1 \int_0^\infty \exp[-\chi^2/2]\, \chi^{n-1}\, d\chi$

$$= C_1 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Big/ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$$

$$= C_1\, \Gamma\frac{n}{2} \cdot 2^{(n-2)/2}$$

অর্থাৎ $C_1 = \dfrac{1}{\Gamma\frac{n}{2}\, 2^{(n-2)/2}}$

সুতরাং χ-এর বিভাজন হ'ল,

$$dF = \frac{1}{\Gamma\frac{n}{2}\, 2^{(n-2)/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \chi^{n-1} d\chi \qquad 0 < \chi < \infty$$

এই বিভাজনকে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ বিভাজন বলা হয়

(*ii*) x^2-এর বিভাজন,

$$dF = C_2 \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right](\chi^2)^{(n-2)/2}\, d\chi^2 \quad (\text{ধ্রুবককে } C_2 \text{ ধরিয়া})$$

সুতরাং $$1 = \int_0^\infty dF = C_2 \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right](\chi^2)^{(n-2)/2}\, d\chi^2$$

$$= C_2 \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{n/2}$$

অর্থাৎ C_2

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/}$$

সুতরাং χ^2-এর বিভাজন হ'ল

$$dF = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right](\chi^2)^{(n-2)/2} d\chi^2 \qquad 0 < \chi^2 <$$

এই বিভাজনকে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন বলা হয়।

রাশিবিজ্ঞান ভিত্তিক অনুমানের বেলায় χ^2 বিভাজন বিশেষ প্রয়োজনীয়। এর প্রধান লক্ষণগুলি সম্পর্কে নীচে আলোচনা করা হচ্ছে।

(1) χ^2-এর সংজ্ঞা থেকেই বোঝা যায় যে 1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 একটি প্রমাণ নর্ম্যাল চলের বর্গের সমতুল।

(2) n স্বাতন্ত্র্য মাত্রাযুক্ত χ^2 চলটি $\frac{1}{2}$ ও $\frac{n}{2}$ পূর্ণকাঙ্কযুক্ত গামা বিভাজন অনুসরণ করে। [কারণ a ও p পূর্ণকাঙ্কযুক্ত গামা বিভাজন হচ্ছে

$$dF = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \exp[-ax]\, x^{p-1} dx,\ 0 < x < \infty\ ;\ a, p > 0\ ]$$

(3) $$E(\chi^2) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right](\chi^2)^{n} \quad d\chi^2$$

$$\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{(n+2)/2}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}$$

$$= n$$

$$E(\chi^2)^2 = \frac{1}{\left|\frac{n}{2}\right. 2^{n/2}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] (\chi^2)^{(n+2)/2} d\chi^2$$

$$\frac{\left|\frac{n+4}{2}\right. 2^{\frac{n+4}{2}}}{2^{n/2}}$$

$$= n(n+2)$$

অনুরূপভাবে

$$E(\chi^2)^3 = n(n+2)(n+4)$$

$$E(\chi^2)^4 = n(n+2)(n+4)(n+6)$$

সুতরাং $\mu_2(\chi^2) = 2n$

অর্থাৎ $V(\chi^2) = 2n$ এবং $s.d\ (\chi^2) = \sqrt{2n}$

$$\mu_3(\chi^2) = 8n$$

$$\mu_4(\chi^2) = 12n^2 + 48n$$

$$\beta_1(\chi^2) = \frac{8}{n}$$

$$\beta_2(\chi^2) = 3 + \frac{12}{n}$$

সুতরাং χ^2-এর বিভাজন দক্ষিণায়ত অপ্রতিসম ও অতিতীক্ষ্ণ

(4) $$f(\chi^2) = \frac{1}{\left|\frac{n}{2}\right. 2^{n/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] (\chi^2)^{(n-2)/2}$$

$$\frac{df}{d\chi^2} = \frac{1}{\left|\frac{n}{2}\right. 2^{n/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] (-\tfrac{1}{2})(\chi^2)^{(n-2)/2}$$

$$\frac{1}{\left|\frac{n}{2}\right. 2^{n/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \frac{n-2}{2} (\chi^2)^{(n-4)/2}$$

$\frac{df}{d\chi^2} = 0$ হলে

$$\frac{1}{\left|\frac{n}{2}\right. 2^{n/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] (\chi^2)^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{n-2}{2} - \frac{\chi^2}{2}\right) = 0$$

এখন $\chi^2=0, n-2$ বা ∞ হচ্ছে এই সমীকরণের বীজ ; তন্মধ্যে 0 ও ∞ প্রান্তবিন্দুদ্বয়, সুতরাং $(n-2)$ ভূয়িষ্ঠক হতে পারে।

আবার $\left[\frac{d^2f}{d(\chi^2)^2}\right]_{\chi^2=n-2}$ একটি ঋণরাশি

সুতরাং χ^2-এর ভূয়িষ্ঠক $(n-2)$, যদি অবশ্য $n>2$ হয়। $n \leqslant 2$ হলে χ^2-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব রেখা ক্রমক্ষীয়মাণ হয় অর্থাৎ χ^2 0-থেকে বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে রেখাটি উঁচু থেকে নীচুতে নামতে থাকে।

13.6.5 x^2 সমষ্টির বিভাজন :

যদি Y_i^2 $(i=1, 2,..., k)$ যথাক্রমে n_i $(i=1, 2,..., k)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে এবং যদি তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে

$$Y^2=\sum_{i=1}^{k} Y_i^2$$

এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

$Y_1, Y_2,..., Y_k$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF=\text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2\right]\prod_{i=1}^{k} Y_i^{n_i-1}\prod_{i=1}^{k} dY_i$$

এখন নীচের কৌণিক রূপান্তর প্রয়োগ করা হ'ল :

$$Y_1=Y\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}\cos\theta_{k-1}$$
$$Y_2=Y\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}$$
$$Y_3=Y\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-3}\sin\theta_{k-2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$Y_{k-1}=Y\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$Y_k=Y\sin\theta_1$$

যেখানে $0<Y<\infty.\ 0<\theta_i<\frac{\pi}{2}$ $(i=1, 2,...., n-1)$

তাহলে $\sum_{i=1}^{k} Y_i^2=Y^2$ এবং $|J|$

$$=Y^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}$$

সুতরাং $Y; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}$-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{Y^2}{2}\right] Y^{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} \; Y^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} f_i(\theta_i)\, dY \prod_{i=1}^{k-1} d\theta_i$$

(যেখানে $f_i(\theta_i)$ একটি θ_i-এর অপেক্ষক)

$$= \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{Y^2}{2}\right] Y^{\sum_{i=1}^{k} n_i - 1} \prod_{i=1}^{k-1} f_i(\theta_i)\, dY \prod_{i=1}^{k-1} d\theta_i$$

এর থেকেই দেখা যাচ্ছে যে $Y; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}$ সকলেই পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নিবেশিত। এর মধ্যে Y-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{Y^2}{2}\right] Y^{\sum_{i=1}^{k} n_i - 1} dY$$

$$= \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{Y^2}{2}\right] Y^{n-1} dY \quad \text{যেখানে } n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

এবং Y^2-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{Y^2}{2}\right] (Y^2)^{\frac{n-2}{2}} dY^2$$

এই বিভাজন দুইটি যথাক্রমে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ ও χ^2 বিভাজন। তাই প্রমাণিত হ'ল যে, $Y^2 = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2$-এর বিভাজন $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 হবে।

13.6.6 t-বিভাজন :

যদি y গড় 0 ও ভেদমান 1 বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন এবং Y চলটি n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ বিভাজন অনুসরণ করে এবং যদি তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে

$$t = y / \sqrt{Y^2/n}$$

এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

y ও Y-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp{}^{-\frac{1}{2}}[y^2 + Y^2]\; Y^{n-1} dy\, dY$$

এখন নীচের কৌণিক রূপান্তর প্রয়োগ করা হ'ল :

$y = R\cos\theta$, $Y = R\sin\theta$ (যেখানে $0 < R < \infty$, $0 < \theta < \pi$)

তাহলে $y^2 + Y^2 = R^2$ এবং $|J| = R$

সুতরাং R ও θ-র যৌথবিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \ \exp[-R^2/2] \ R^n \sin^{n-1}\theta \ dR \, d\theta$$

এর থেকে দেখা যাচ্ছে যে, R ও θ পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নিবেশিত এবং θ-র বিভাজন হ'ল

$$dF = \text{ধ্রুবক} \sin^{n-1}\theta \, d\theta$$

$$= C\sin^{n-1}\theta \, d\theta \qquad \text{(ধ্রুবককে } C \text{ ধ'রে)}$$

এখন $= \int_0^\pi dF = C\int_0^\pi \sin^{n-1}\theta \, d\theta$

$$= 2C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta \, d\theta$$

$$= CB\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

সুতরাং $C = \dfrac{1}{B(n/2, 1/2)}$

তাই θ-র বিভাজন

$$dF = \frac{1}{B(n/2, 1/2)} \sin^{n-1}\theta \, d\theta$$

এখন $t = \sqrt{n}\cot\theta$

সুতরাং $dt = -\sqrt{n}\operatorname{cosec}^2\theta \, d\theta$

সুতরাং $|J| = \left|\dfrac{d\theta}{dt}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}(1 + t^2/n)}$

আবার $\sin^{n-1}\theta = \dfrac{1}{(1 + t^2/n)^{\frac{n-1}{2}}}$

তাই t-র বিভাজন

$$dF = \frac{1}{B(n/2, 1/2)\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + t^2/n)^{(n+1)/2}} dt \qquad -\infty < t < \infty$$

এই বিভাজনকে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন বলা হয়

t-বিভাজনের বিশেষ প্রয়োজনীয় ভূমিকা রয়েছে। এ বিভাজনের প্রধান লক্ষণ সম্পর্কে নীচে আলোচনা করা যাচ্ছে।

(1) 1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t কোশি (cauchy) বিভাজন অনুসরণ করে, কারণ সেক্ষেত্রে $dF=\frac{dt}{\pi(1+t^2)}$, (এটাই কোশি-বিভাজন)

(2) $E(t)=\frac{1}{B(n/2,\ 1/2)\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}\,dt$

ধরলাম $t=\sqrt{n}\cot\theta$

সুতরাং $E(t)=\frac{\sqrt{n}}{B(n/2,\ 1/2)}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta\cos\theta\,d\theta$

$=0$ [যেহেতু $\sin^{n-2}(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta)$
$=-\sin^{n-2}\theta\cos\theta$]

$$E(t^2)=\frac{1}{B(n/2,\ 1/2)\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}\,dt$$

$$=\frac{n}{B(n/2,1/2)}\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

[পূর্বের মতো $t=\sqrt{n}\cot\theta$ ধ'রে]

$$=\frac{2n}{B(n/2,1/2)}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-3}\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

(যেহেতু $\sin^{n-3}(\pi-\theta)\cos^2(\pi-\theta)=\sin^{n-3}\theta\cos^2\theta$)

$$=\frac{2n}{B(n/2,1/2)}\ \frac{B\left(\frac{n-2}{2},\frac{3}{2}\right)}{2}$$

$$=\frac{n}{n-2}$$

অনুরূপভাবে $E(t^3)=0$

$$E(t^4)=\frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

সুতরাং $\mu_2(t)=\frac{n}{n-2}$

অর্থাৎ $V(t)=\frac{n}{n-2}$ এবং $s.d(t)=\sqrt{\frac{n}{n-2}}$

$\mu_3(t)=0$

$$\mu_4(t)=\frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

$$\beta_1(t)=0$$

$$\beta_2(t)=\frac{3(n-2)}{n-4}$$

তাই t-বিভাজন $t=0$-এর উভয়পাশে প্রতিসম ও $n>4$ হলে অতিতীক্ষ্ণ। (এটা সহজেই বোঝা যায় যে উপরিলিখিত বিভিন্ন পরিঘাত নিরূপণে n-এর মানের উপর বিভিন্ন শর্ত আরোপ করা হয়েছে, যথা $V(t)$ তখনই অর্থবহ যখন $n>2$ ইত্যাদি।)

13.6.7 F-বিভাজন :

যদি Y_1^2 ও Y_2^2 যথাক্রমে n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে এবং যদি তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে

$$F=\frac{Y_1^2/n_1}{Y_2^2/n_2}$$

এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

Y_1 ও Y_2-এর যৌথ বিভাজন

$$dF=\text{ধ্রুবক}\ \exp\left[-\tfrac{1}{2}(Y_1^2+Y_2^2)\right]Y_1^{n_1-1}Y_2^{n_2-1}dY_1dY_2$$

এখন নীচের কৌণিক রূপান্তর সাধন করা হল :

$$\begin{aligned} Y_1&=R\cos\theta \\ Y_2&=R\sin\theta \end{aligned}\quad\left(\begin{aligned}\text{যেখানে } 0&<R<\infty \\ 0&<\theta<\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right)$$

তাহলে $Y_1^2+Y_2^2=R^2$ এবং $|J|=R$

স্থতরাং R ও θ এর যৌথ বিভাজন

$$dF=\text{ধ্রুবক}\ \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right]R^{n_1+n_2-1}\cos^{n_1-1}\theta\sin^{n_2-1}\theta\ dRd\theta$$

এর থেকে দেখা যাচ্ছে যে R ও θ পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নিবেশিত।

আবার শুধু θ-র বিভাজন

$$\begin{aligned} dF&=\text{ধ্রুবক}\ \cos^{n_1-1}\theta\sin^{n_2-1}\theta d\theta \\ &=c\cos^{n_1-1}\theta\sin^{n_2-1}\theta \quad (\text{ধ্রুবককে } c \text{ ধরে}) \end{aligned}$$

এখন $\quad 1=\int_0^\infty dF = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n_1-1}\theta \sin^{n_2-1}\theta d\theta$

$$= c\,\frac{B(n_1/2,\, n_2/2)}{2}$$

সুতরাং $c = \dfrac{2}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}$

তাই θ-র বিভাজন

$$dF \quad \frac{}{B(n_1/2,\, n_2/2)} \cos^{n_1-1}\theta \sin^{n_2-1}$$

এখন $\quad F=\dfrac{n_2}{n_1}\cot^2\theta$

সুতরাং $dF = -2\dfrac{n_2}{n_1}\cot\theta \operatorname{cosec}^2\theta d\theta$

ফলে $\quad |J| = \left|\dfrac{d\theta}{dF}\right| \quad \dfrac{\sqrt{n_1/n_2}}{2\sqrt{F}\{1+(n_1/n_2)F\}}$

আবার $\quad \cos^{n_1-1}\theta \sin^{n_2-1}\theta$

$$= \frac{\cot^{n_1-1}\theta}{\operatorname{cosec}^{n_1+n_2-2}\theta}$$

$$\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}F\right)^{n_1-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{n_1+n_2-2}}$$

তাই F-এর বিভাজন

$$\frac{1}{B(n_1/2,\, n_2/2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n}{2}}} \quad dF\ (0<F<\infty)$$

এই বিভাজনকে n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন বলে।

এই বিভাজন থেকেই z-এর বিভাজন নির্ণয় করা যায়, যেখানে

$$z=\tfrac{1}{2}\log F$$

বা $$F=e^{2z}$$

z-এর বিভাজন হ'ল

$$dF = \frac{2}{B(n_1/2, n_2/2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{e^{n_1 z}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}e^{2z}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot dz \; (-\infty < z \angle \infty)$$

এই বিভাজনকে n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত z বিভাজন বলে।

F বিভাজনেরও বিশেষ প্রয়োজনীয় ভূমিকা রয়েছে। এই বিভাজনের কয়েকটি বিশেষ লক্ষণ সম্পর্কে নীচে আলোচনা করা হচ্ছে।

(1) যদি $x = \frac{n_1}{n_2} F \Big/ \left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)$ হয়

তবে $1 - x = 1 \Big/ \left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)$

এবং $\quad dx = \frac{n_1}{n_2} dF \Big/ \left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)^2$

সুতরাং x-এর বিভাজন

$$dF = \frac{1}{B(n_1/2, n_2/2)} x^{\frac{n_1-2}{2}} (1-x)^{\frac{n_2-2}{2}} dx$$

তাই বলা যায় x বিটা বিভাজন অনুসরণ করে, যার পূর্ণকাঙ্ক $\frac{n_1}{2}$ ও $\frac{n_2}{2}$ [কারণ p ও q পূর্ণকাঙ্কযুক্ত বিটা বিভাজন হল

$$dF = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \qquad 0 < x < 1]$$

(2) $n_1 = 1$ বসালে

$\frac{Y_1^2}{n_1}$ একটিমাত্র প্রমাণ নর্ম্যাল চলের বর্গ

সুতরাং সেক্ষেত্রে $F = t^2$

তাই 1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F হচ্ছে n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t-র বর্গ।

(3) $\frac{1}{F} = \frac{Y_2^2/n_2}{Y_1^2/n_1}$

সুতরাং $\frac{1}{F}$ চলটি n_2 ও n_1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন অনুসরণ করবে।

(4) $$E(F) = \frac{1}{B(n_1/2, n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \int_0^\infty \frac{F^{\frac{n_1}{2}}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dF$$

ধরা যাক $x=\frac{n_1}{n_2}F\Big/\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)$

সুতরাং $1-x=1\Big/\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)$

$$dx=\frac{n_1}{n_2}dF\Big/\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^2$$

সুতরাং $E(F)=\frac{n_2/n_1}{B(n_1/2,\, n_2/2)}\int_0^1 x^{\frac{n_1}{2}}(1-x)^{\frac{n_2-4}{2}}\,dx$

$$=\frac{n_2}{n_1}\frac{B\left(\frac{n_1+2}{2},\frac{n_2-2}{2}\right)}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$=\frac{n_2}{n_2-2}$$

সুতরাং $E(F)$ n_1-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

$$E(F^2)=\frac{1}{B(n_1/2,\, n_2/2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^\infty \frac{F^{\frac{n_1+2}{2}}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\,dF$$

$$=\frac{(n_2/n_1)^2}{B(n_1/2,\, n_2/2)}\int_0^1 x^{\frac{n_1+2}{2}}(1-x)^{\frac{n_2-6}{2}}\,dx$$

(পূর্বের মতো $x=\dfrac{\frac{n_1}{n_2}F}{1+\frac{n_1}{n_2}F}$ ধরে)

$$=\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\frac{B\left(\frac{n_1+4}{2},\frac{n_2-4}{2}\right)}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$=\frac{n_2^2(n_1+2)}{n_1(n_2-2)(n_2-4)}.$$

সুতরাং $\mu_2(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}.$

অর্থাৎ $V(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

এবং $s.d(F)=\frac{\sqrt{2}\,n_2\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{n_1}(n_2-2)\sqrt{n_2-4}}$

(এটা সহজেই বোঝা যায় যে উপরিলিখিত বিভিন্ন পরিঘাত নিরূপণে n_2-এর মানের উপর শর্ত আরোপ করা হয়েছে, যথা $E(F)$ তথনই বর্তমান যখন $n > 2$ ইত্যাদি।)

স্বাতন্ত্র্যমাত্রাদ্বয় n_1 ও n_2-এর মধ্যে যদি n_2 অসীমাভিমুখী হয় তবে F-এর রূপ $\frac{\chi^2 n_1}{n_1}$ দাঁড়াবে,

অর্থাৎ $F_{n_1, \infty} = \frac{\chi_{n_1}^2}{n_1}$

তেমনি যদি n_1 অসীমাভিমুখী হয় তবে F-এর রূপ $\frac{n_2}{\chi_{n_2}^2}$ দাঁড়াবে।

অর্থাৎ $F_{\infty, n_2} = \frac{n_2}{\chi_{n_2}^2}$

13.7 বিচ্ছিন্ন চল সংক্রান্ত নমুনাজ বিভাজন (Sampling distribution associated with discrete variables) :

বিচ্ছিন্ন চলসংক্রান্ত নমুনাজ বিভাজনের বিশদ আলোচনার মধ্যে না গিয়ে কেবলমাত্র দ্বিপদ ও পোয়াসঁ চলের বিষয়ে বলা হচ্ছে।

n-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ চলের সমষ্টির বিভাজনের বিষয় পূর্বে বলা হয়েছে। তা থেকে নীচের উপপাদ্যটি প্রতীয়মান হয়।

উপপাদ্য : যদি $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত একটি দ্বিপদ বিভাজন থেকে আহৃত একটি সমসম্ভব নমুনা হয় এবং নমুনাজ সদস্যগুলি যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে $\sum_{i=1}^{n} x_i$ mn ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল হবে।

n-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ চলের সমষ্টির বিভাজনের বিষয়ও পূর্বে বলা হয়েছে। তা থেকে আবার নীচের উপপাদ্যটি প্রতীয়মান হয়।

উপপাদ্য : যদি $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ λ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত একটি পোয়াস বিভাজন থেকে আহৃত একটি সমসম্ভব নমুনা হয় এবং নমুনাজ সদস্যগুলি যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে $\sum_{i=1}^{n} x_i$ $n\lambda$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পোয়াস চল হবে।

13.8 অবিচ্ছিন্ন চল সংক্রান্ত নমুনাজ বিভাজন

(Sampling distribution associated with continuous variables) :

13.8.1 একচল নর্ম্যাল বিভাজন থেকে সংগৃহীত n আয়তনের সমসম্ভব নমুনার গড় ও ভেদমানের নমুনাজ বিভাজন :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে আহৃত একটি সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃই সমসম্ভব নমুনাটির অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।)

ধরলাম এই নমুনার গড় ও ভেদমান যথাক্রমে

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$\bar{x}$ ও s^2—এই নমুনাঙ্ক দুইটির নমুনাজ বিভাজন নিরূপণ করতে হবে।

$x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right] \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

ধরলাম $\quad y_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

সুতরাং $\quad y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক } \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] \prod_{i=1}^{n} dy_i$$

এখন নীচের প্রতিলম্ব রূপান্তরের প্রয়োগ করা যাক :

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} y_2 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} y_n = \sqrt{n}\, \bar{y}$$

$$z_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \cdots + c_{in} y_n \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

তাহলে $\quad \displaystyle\sum_{i=2}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - z_1^2$

$$=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{ns^2}{\sigma^2}$$

সুতরাং $z_1, z_2, \cdots, z_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right]\prod_{i=1}^{n} dz_i$$

এর থেকে দেখা যাচ্ছে যে $z_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$ পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নিবেশিত এবং প্রত্যেকেই গড় 0 ও ভেদমান 1 বিশিষ্ট নর্ম্যাল চল।

বিশেষতঃ z_1-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক}\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}z_1^2\right) dz_1$$

কিন্তু $z_1 = \sqrt{n}\,\bar{y} = \sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)/\sigma$

সুতরাং $\bar{x}$-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক}\ \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right] d\bar{x}$$

অর্থাৎ $\bar{x}$-এর বিভাজন $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

বিশদভাবে লিখলে বিভাজনটি দাঁড়ায়

$$dF = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right] d\bar{x}$$

আবার যেহেতু $z_i\ (i=2, 3, \ldots, n)$ পরস্পর নিরপেক্ষ প্রমাণ নর্ম্যাল চল, $\sum_{i=2}^{n} z_i^2$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।

সুতরাং $\dfrac{ns^2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।

তাই s^2-এর বিভাজন

$$dF = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{ns^2}{2\sigma^2}\right](s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds^2$$

এবং s-এর বিভাজন

$$dF = \frac{2\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{ns^2}{2\sigma^2}\right]s^{n-2}\, ds.$$

আবার যেহেতু z_1-এর বিভাজন এবং $z_2, z_3, \ldots, z_n$-এর যৌথ বিভাজন পরস্পর নিরপেক্ষ $\bar{x}$ ও s^2 (বা s)-এর বিভাজনও পরস্পর নিরপেক্ষ।

s^2 ও s-এর বিভাজনের কয়েকটি প্রধান লক্ষণ নীচে আলোচিত হ'ল।

$(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2-এর ক্ষেত্রে

$$E(\chi^2) = n-1$$
$$V(\chi^2) = 2(n-1)$$

এখন $\frac{ns^2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন

সুতরাং $$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$
$$V(s^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

তাই নমুনাঙ্ক s^2-কে পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলা চলে না। (কোন নমুনাঙ্ক T-এর প্রত্যাশা যদি পূর্ণকাঙ্ক θ হয়, তবে T-কে θ-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলে।)

σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে

$$s'^2 = \frac{n}{n-1}s^2$$
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

তাই $\frac{(n-1)s'^2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন s'^2-এর বিভাজন

$$dF = \frac{\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\frac{n-1}{2}} \exp\left[-\frac{(n-1)s'^2}{2\sigma^2}\right](s'^2)^{\frac{n-3}{2}}\,ds'^2$$

$$E(s'^2) = \sigma^2$$

$$V(s'^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

আবার s'-এর বিভাজন

$$dF = \frac{2\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\frac{n-1}{2}} \exp\left[-\frac{(n-1)s'^2}{2\sigma^2}\right] s'^{n-2}\,ds'$$

এখন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ-এর ক্ষেত্রে

$$E(\chi) = \frac{1}{\Gamma\frac{n-1}{2}\,2^{\frac{n-3}{2}}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]\chi^{n-1}d\chi$$

$$= \left(\Gamma\frac{n}{2}\Big/\Gamma\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2}$$

$$V(\chi) = E(\chi^2) - E^2(\chi)$$

$$= (n-1) - 2\left(\Gamma\frac{n}{2}\Big/\Gamma\frac{n-1}{2}\right)^2$$

এখন যেহেতু $\frac{\sqrt{n-1}\,s'}{\sigma} = \chi$

$$E(s') = \left(\Gamma\frac{n}{2}\Big/\Gamma\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma$$

$$V(s') = \left\{1 - \frac{2}{n-1}\left(\Gamma\frac{n}{2}\Big/\Gamma\frac{n-1}{2}\right)^2\right\}\sigma^2$$

এখানে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে, যদিও $E(s'^2) = \sigma^2$, $E(s) \neq \sigma$ অর্থাৎ s'^2 যদিও σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক s' কিন্তু σ-র পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক নয়।

13.8.2 'স্টুডেণ্ট'-এর (Student's) t বিভাজন :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যালপূর্ণক থেকে আহৃত n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃ নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ) আরও ধরলাম যে এই নমুনার গড় ও ভেদমান যথাক্রমে

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ও $$s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

(এখানে s'^2 পূর্ণকের ভেদমান σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক)

তা হলে 'স্টুডেণ্ট'-এর $t = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s'/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s'}$

এখন $$\frac{(\bar{x}-\mu)}{s'/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s'^2/\sigma^2}{n-1}}} = \frac{y}{\sqrt{Y^2/(n-1)}}$$ ধরলাম,

যেখানে $y = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$-এর বিভাজন $N(0, 1)$,

$Y^2 = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন এবং y ও Y পরস্পর নিরপেক্ষ।

সুতরাং অনুচ্ছেদ 13.6.6 অনুযায়ী $\frac{\bar{x}-\mu}{s'/\sqrt{n}}$ নমুনাঙ্কটি $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন অনুসরণ করবে।

এই নমুনাঙ্কটিকে 'স্টুডেণ্ট'-এর $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t-নমুনাঙ্ক বলা হয় (রাশিবিজ্ঞানী ডব্লু. এস. গসেট W. S. Gossett তাঁর লেখায় এই ছদ্মনাম ব্যবহার করতেন।)

যদি $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ হয়,

তবে $t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}$ নিতে হবে।

এবং এরূপ t-র বিভাজন পূর্বের মতোই থাকবে।

13.8.3 ফিশার-এর (Fisher's) t বিভাজন :

ধরলাম $(x_{11}, x_{12},\ldots, x_{1n_1})$ গড় μ_1 ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল-পূর্ণক থেকে আহৃত n_1 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা এবং $(x_{21}, x_{22},\ldots, x_{2n_2})$ গড় μ_2 ও একই ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট অপর একটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে আহৃত অপর একটি n_2 আয়তনের সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃ উভয় ক্ষেত্রেই নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।) আরও ধরলাম

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1} x_{1i}.$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$$

$$s_1'^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2$$

$$s_2'^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2$$

$$s'^2=\frac{(n_1-1)s_1'^2+(n_2-1)s_2'^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}$$

(এক্ষেত্রে $s_1'^2$ ও $s_2'^2$ উভয়ই পূর্ণকদ্বয়ের সাধারণ ভেদমান σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক। উহাদিগকে সংযুক্ত ক'রে s'^2 পাওয়া গেছে এবং এটিও σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

তাহলে 'ফিশার'-এর $t=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s'\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)\}}{s'}$$

এখন $\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s'\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

$$=\frac{\{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)\}/\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}{\sqrt{\{(n_1-1)s'^2_1/\sigma^2+(n_2-1)s'^2_2/\sigma^2\}/(n_1+n_2-2)}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{\dfrac{Y^2}{n_1+n_2-2}}}$$

যেখানে $y=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ এর বিভাজন $N(0, 1)$

কারণ $\bar{x}_1$-এর বিভাজন $N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma^2}{n_1}\right)$

$\bar{x}_2$-এর বিভাজন $N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)$

এবং $Y^2=\dfrac{(n_1-1)s'^2_1+(n_2-1)s'^2_2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন (n_1+n_2-2) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন

কারণ $(n_1-1)s'^2_1/\sigma^2$-এর বিভাজন (n_1-1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন ও $(n_2-1)s'^2_2/\sigma^2$-এর বিভাজন (n_2-1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন এবং y ও Y পরস্পর নিরপেক্ষ।

সুতরাং 13.6.6 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী $\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s'\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$-এর বিভাজন (n_1+n_2-2) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন হবে।

13.8.4. 'স্টুডেণ্ট'-এর যুগ্ম t বিভাজন (Student's paired t distribution) :

x ও y-এর একটি দ্বিচলক নর্ম্যাল পূর্ণক ধরা হ'ল যার গড়দ্বয় μ_x ও μ_y. ভেদমানদ্বয় σ^2_x ও σ^2_y ও সহগাঙ্ক ρ হয়। মনে করা যাক $[(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n)]$ এরূপ পূর্ণক থেকে আহৃত n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃ নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।)

ধরলাম v-একটি নূতন চল যা $x-y$-এর সমান। সুতরাং v-এর বিভাজন হচ্ছে $N(\mu_v, \sigma^2_v)$ যেখানে

$$\mu_v = \mu_x - \mu_y$$
$$\sigma^2_v = \sigma^2_x + \sigma^2_y - 2\rho\sigma_x\sigma_y.$$

ও আরও ধরলাম $v_i = (x_i - y_i)$

ফলে $$\bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{x} - \bar{y}$$

$$s'^2_v = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2$$

তাহলে $t = \dfrac{\bar{v} - \mu_v}{s'_v/\sqrt{n}}$-কে বলা হয় 'স্টুডেণ্ট'-এর যুগ্ম t.

এখন, $$\frac{\bar{v} - \mu_v}{s'_v/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\bar{v} - \mu_v}{\sigma_v/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s'^2_v/\sigma^2_v}{n-1}}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{Y^2/(n-1)}}$$

যেখানে $y = \dfrac{\bar{v} - \mu_v}{\sigma_v/\sqrt{n}}$-এর বিভাজন $N(0, 1)$

ও $Y^2 = \dfrac{(n-1)s'^2_v}{\sigma^2_v}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন

এবং y ও Y পরস্পর নিরপেক্ষ।

সুতরাং অনুচ্ছেদ 13.6.6 অনুযায়ী উপরিলিখিত $\frac{\bar{v}-\mu_v}{s'_v/\sqrt{n}}$ নমুনাঙ্কটি $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t-বিভাজন অনুসরণ করবে।

13.8.5. নির্ভরণাঙ্কের বিভাজন ও তৎসংশ্লিষ্ট t-র বিভাজন :

ধরা যাক x ও y দুইটি চল, তন্মধ্যে x সম্ভাবনা নিরপেক্ষ (nonstochastic) ও y সম্ভাবনাশ্রয়ী (stochastic) এবং x-এর উপর নির্ভরশীল y-এর শর্তাধীন বিভাজন যেন নর্ম্যাল গোত্রীয় যেখানে

$$E(y\,|\,x)=\mu_x=\alpha+\beta x$$
$$V(y\,|\,x)=\sigma^2$$

অর্থাৎ পূর্ণকে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ ঋজুরৈখিক। আরও ধরা যাক $[(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n)]$ একটি $n(>3)$ আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা এবং এই নমুনা থেকে x-এর উপর y-এর লঘিষ্ঠ বর্গনীতি অনুযায়ী নিরূপিত নির্ভরণ রেখা (least-square regression line)

$$Y=a+bx$$

যেখানে $$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

এবং $$a=\bar{y}-b\bar{x}$$

a ও b-এর বিভাজন নির্ণয় করতে হবে।

(এ কথা মনে রাখতে হবে যে, n আয়তনের বিভিন্ন নমুনায় $x_1, x_2,\ldots, x_n$-এর কোন পরিবর্তন হবে না। একমাত্র $y_1, y_2,\ldots, y_n$-ই এক নমুনা থেকে অন্য নমুনায় পরিবর্তিত হবে।)

কাজের সুবিধার জন্য লেখা যাক

$$E(y/x) = a' + \beta(x - \bar{x}) \text{ যেখানে } a' = a + \beta\bar{x}$$

$$Y = a' + b(x - \bar{x}) \text{ যেখানে } a' = a + b\bar{x}$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$-এর যৌথবিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i \{y_i - a' - \beta(x_i - \bar{x})\}^2\right]\prod_{i=1}^{n} dy_i$$

$$= \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i \{(y_i - a' - b(x_i - \bar{x})) + (a' - a')\right.$$

$$\left. + (b(x_i - \bar{x}) - \beta(x_i - \bar{x}))\}^2\right]\prod_{i=i}^{n} dy_i$$

$$= \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_i (y_i - a' - b(x_i - \bar{x}))^2 + n(a' - a')^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_i (x_i - \bar{x})^2(b - \beta)^2\right\}\right]\prod_{i=1}^{n} dy_i$$

এখন নীচের প্রতিলম্ব রূপান্তর সাধন করা হ'ল

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y_2 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}y_n$$

$$= \sqrt{n}\,\bar{y} = \sqrt{n}\,(a + b\bar{x}) = \sqrt{n}a'$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})y_1 + (x_2 - \bar{x})y_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})y_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,b$$

$$z_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n \qquad (i = 3, 4, \ldots, n)$$

সুতরাং $z_1, z_2, \ldots, z_n$-এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=3}^{n} z_i^2 + n\left(\frac{z_1}{\sqrt{n}} - a'\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\left(\frac{z_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} - \beta\right)^2\right\}\right]\prod_{i=1}^{n} dz_i$$

এর থেকেই দেখা যাচ্ছে যে, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যালভাবে নিবেশিত।

বিশেষতঃ z_1-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{z_1}{\sqrt{n}} - a'\right)^2\right] dz_1$$

সুতরাং a'-এর বিভাজন $(a' = z_1/\sqrt{n})$

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(a' - a')^2\right] da'$$

অর্থাৎ a'-এর বিভাজন $N(a', \sigma^2/n)$

z_2-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} - \beta\right)^2\right] dz_2$$

সুতরাং b-এর বিভাজন $\left(b = z_2 \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}(b - \beta)^2\right] db$$

অর্থাৎ b-এর বিভাজন $N\left\{\beta, \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}$

আবার $a = a' - b\bar{x}$

সুতরাং a-র বিভাজন $N\left[a' - \beta\bar{x},\ \sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right\}\right]$

অর্থাৎ $$N\left\{a,\ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sigma^2\right\}$$

অবশেষে z_i-এর বিভাজন $N(0, \sigma^2)$, $(i = 3, 4, \ldots, n)$

সুতরাং $\sum_{i=3}^{n} z_i^2/\sigma^2$-এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন,

অর্থাৎ

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i - a' - b(x_i - \bar{x})\right\}^2$$

বা $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$ এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।

ধরা যাক $$\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 = s'^2$$

(মনে রাখতে হবে যে এই s'-এর সংজ্ঞা পূর্বের s'-এর সংজ্ঞা থেকে ভিন্ন)

সুতরাং $\frac{(n-2)s'^2}{\sigma^2} = (n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 চল।

তাই s'-এর বিভাজন

$$dF = \text{ধ্রুবক} \exp\left[-\frac{(n-2)s'^2}{2\sigma^2}\right] s'^{n-3} ds'$$

ধরলাম $$t = \frac{b - \beta}{s'\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

এখন
$$\frac{b-\beta}{s'\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{b-\beta}{\sigma\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s'^2}{\sigma^2}\Big/(n-2)}}=\frac{y}{\sqrt{\dfrac{Y}{n-2}}} \text{ ধরা হ'ল}$$

এখানে $y=\dfrac{b-\beta}{\sigma\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$-এর বিভাজন $N(0, 1)$

এবং $Y^2=\dfrac{(n-2)s'^2}{\sigma^2}$-এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন

এবং y ও Y পরস্পর নিরপেক্ষ।

সুতরাং 13.6.6 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী $\dfrac{b-\beta}{s'\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$

-এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন হবে।

13.8.6 'ফিসার'-এর (Fisher's) F বিভাজন :

ধরলাম $(x_{11}, x_{12},\ldots, x_{1n_1})$ গড় μ_1 ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n_1 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা এবং $(x_{21}, x_{22},\ldots, x_{2n_2})$ গড় μ_2 ও ভেদমান $\sigma_2{}^2$ বিশিষ্ট অপর একটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n_2 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃ উভয়ক্ষেত্রেই নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।)

আরও ধরলাম

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$$

$$s_1'^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$$

$$s_2'^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

তাহলে ফিসারের $F = \frac{s_1'^2/\sigma_1^2}{s_2'^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1'^2/s_2'^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$

এখন $\frac{s_1'^2/\sigma_1^2}{s_2'^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n_1-1)s_1'^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\frac{(n_2-1)s_2'^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} = \frac{Y_1^2/(n_1-1)}{Y_2^2/(n_2-1)}$

যেখানে $Y_1^2 = (n_1 - 1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 চল

$Y_2^2 = (n_2 - 1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 চল

এবং Y_1 ও Y_2 পরস্পর নিরপেক্ষ

সুতরাং অনুচ্ছেদ 13.6.7 অনুযায়ী উপরিলিখিত $\frac{s_1'^2/\sigma_1^2}{s_2'^2/\sigma_2^2}$ নমুনাঙ্কটি $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন অনুসরণ করে।

এই নমুনাঙ্কের নাম ফিসারের নামানুসারে F নমুনাঙ্ক। ফিসার অবশ্য F-এর পরিবর্তে z নমুনাঙ্ক ব্যবহার করেছেন, যেখানে $z = \frac{1}{2} \log_e F$। F-এর প্রথম ব্যবহার স্নেডেকর (Snedecor)-এর হাতে।

এখন $F' = s_1'^2/s_2'^2$-এর বিভাজন নির্ণয় করা যাক।

স্পষ্টতঃই $F = \frac{F'}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2}{\sigma}{}_2 F'$

তাই F'-এর বিভাজন

$$\frac{(\sigma_2^2/\sigma_1^2)^{\frac{n_1-1}{2}}}{\left(\frac{n_1-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}\right)} \left(\frac{n_1-1}{n_2-1}\right)^{\frac{n_1-1}{2}} \frac{F'^{\frac{n_1-3}{2}}}{\left(1 + \frac{n_1-1}{n_2-1} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} F'\right)^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}} dF'$$

13.9. নমুনাঙ্কের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ-ভ্রান্তি (Expectation and standard error of statistic) :

পূর্বে যে উপায়ে χ^2, t ও F-এর গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ-বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়েছে সেই উপায়েই কোন নমুনাঙ্কের নমুনাজ বিভাজন থেকে সেই নমুনাঙ্কের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণভ্রান্তি নির্ণয় করা যায়।

নমুনাজ বিভাজন জানা না থাকলেও ঐ গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণভ্রান্তি পরিঘাতের সাধারণ সংজ্ঞা থেকে বের করা যায়। কোনও পূর্ণক থেকে একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল। পূর্ণকটি যদি আকারে অসীম হয় তবে সমসম্ভব নমুনাটি যেভাবেই সংগৃহীত হোক না কেন অর্থাৎ পুনঃস্থাপনাসহ বা পুনঃ-স্থাপনাবিহীন, উহার অবেক্ষণগুলিকে পরস্পর নিরপেক্ষ বলে ধরা চলে; পূর্ণকটি সসীম হলে অবশ্য একমাত্র পুনঃস্থাপনাসহ সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রেই অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ; অর্থাৎ পুনঃস্থাপনাসহ সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে পূর্ণকটি অসীমই হোক বা সসীমই হোক নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ, কারণ নমুনা আহরণের সময় পূর্ণকের উপাদানের কোন পরিবর্তন ঘটে না, কিন্তু পুনঃস্থাপনাবিহীন সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে পূর্ণকটি কেবলমাত্র অসীম হলেই নমুনাজ অবেক্ষণগুলিকে পরস্পর নিরপেক্ষ বলে ধরা চলে, কারণ এতে পূর্ণকের উপাদানের বস্তুতঃ কোন পরিবর্তন হয় না, কিন্তু এমন অবস্থায় পূর্ণকটি সসীম হলে এর উপাদানের পরিবর্তন ঘটে।

এরূপ পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে কয়েকটি নমুনাঙ্কের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণভ্রান্তি নীচে নির্ণয় করা হচ্ছে।

13.9.1 নমুনালব্ধ অশোধিত পরিঘাতের গাণিতিক প্রত্যাশা, প্রমাণভ্রান্তি ইত্যাদি :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ একটি n আয়তনের এমন নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। এর r-তম অশোধিত পরিঘাত হচ্ছে m'_r এবং যে পূর্ণক থেকে এই নমুনাটি নেওয়া হয়েছে তাতে অশোধিত পরিঘাত হচ্ছে μ'_r.

তাহলে, $$E(m'_r) = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

$$= \frac{1}{n}\, E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^r)$$

$$= \mu'_r \quad \text{যেহেতু } E(x_i^r) = \mu'_r$$

সব $i = 1, 2, \ldots, n$-এর জন্য।

সুতরাং m'_r সবসময় μ'_r-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আবার, $V(m'_r) = E\{m'_r - E(m'_r)\}^2$

$$= E(m'_r)^2 - E^2(m'_r)$$

$$= E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right\}^2 - \mu'^2_r$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^r x_j^r\right) - \mu'^2_r$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(x_i^{2r}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} E(x_i^r)E(x_j^r)\right\} - \mu'^2_r$$

(যেহেতু x_i ও x_j পরস্পর নিরপেক্ষ)

$$= \frac{1}{n}\mu'_{2r} + \frac{n-1}{n}\mu'^2_r - \mu'^2_r$$

$$= \frac{1}{n}(\mu'_{2r} - \mu'^2_r)$$

সুতরাং m'_r-এর প্রমাণভ্রান্তি $\sqrt{\frac{1}{n}(\mu'_{2r} - \mu'^2_r)}$

উদাহরণ হিসাবে ($r = 1$ হলে)

$$E(m'_1) = \mu'_1$$

$$V(m'_1) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{(যদি পূর্ণকের প্রমাণবিচ্যুতি } \sigma \text{ হয়)}$$

অর্থাৎ নমুনাজ গড়ের প্রত্যাশা = পূর্ণক গড়

ও নমুনাজ গড়ের প্রমাণ ভ্রান্তি = $\dfrac{\text{পূর্ণকের প্রমাণবিচ্যুতি}}{\sqrt{\text{নমুনার আয়তন}}}$

(m'_1-এর পরিবর্তে $\bar{x}$ এবং μ'_1-এর পরিবর্তে μ বা m-এর ব্যবহার বেশী দেখা যায়। আমরাও পরে $\bar{x}$ ও μ চিহ্নই ব্যবহার করব।)

$$\begin{aligned}
\text{cov}\,(m'_r, m'_s) &= E[\{m'_r - E(m'_r)\}\{m'_s - E(m'_s)\}] \\
&= E(m'_r m'_s) - E(m'_r)E(m'_s) \\
&= E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)\right\} - \mu'_r\mu'_s \\
&= \frac{1}{n^2}\, E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{r+s} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^r x_j^s\right) - \mu'_r\mu'_s. \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(x_i^{r+s}) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E(x_i^r)\, E(x_j^s)\right\} - \mu'_r\mu'_s
\end{aligned}$$

(যেহেতু x_i ও x_j পরস্পর নিরপেক্ষ)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\,\mu'_{r+s} + \frac{n-1}{n}\,\mu'_r\mu'_s - \mu'_r\mu'_s \\
&= \frac{1}{n}(\mu'_{r+s} - \mu'_r\mu'_s)
\end{aligned}$$

বিকল্প প্রমাণ :

$$V(m'_r) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i^r) \qquad \cdots \text{যেহেতু } x_i\text{-গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ,}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\{E(x_i^{2r}) - E^2(x_i^r)\}$$

$$= \frac{\mu'_{2r} - \mu'^2_r}{n}$$

$$\text{cov}\,(m'_r, m'_s) = \text{cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{cov}(x_i^r, x_i^s)$$ যেহেতু x_i-গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ $i=1, 2, \ldots, n.$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\{E(x_i^r x_i^s)-E(x_i^r)E(x_i^s)\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\{E(x_i^{r+s})-E(x_i^r)E(x_i^s)\}$$

$$=\frac{\mu'_{r+s}-\mu'_r\mu'_s}{n}$$

13.9.2 নমুনালব্ধ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা, প্রমাণভ্রান্তি ইত্যাদি :

নমুনালব্ধ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা ও প্রমাণভ্রান্তি ইত্যাদি নির্ণয় এত সহজ নয়। নীচে কেবলমাত্র দ্বিতীয় গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা ও প্রমাণভ্রান্তি নির্ণয় করা হচ্ছে।

ধরা যাক, নমুনাতে দ্বিতীয় গড়কেন্দ্রিক পরিঘাত m_2 এবং পূর্ণকে μ_2.

$$E(m_2)=E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m'_1)^2\right\}$$

$$=E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-m'^2_1\right\}$$

$$=E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right\}$$

$$=E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}x_ix_j\right)\right\}$$

$$=E\left\{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}x_ix_j\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E(x_i)E(x_j)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\mu'_2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\mu'^2_1$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)(\mu'_2 - \mu'^2_1)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\mu_2$$

m_2-এর পরিবর্তে s^2 লিখে পাওয়া যায়

$$E(s^2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

তাই নমুনার ভেদমান m_2 পূর্ণকের ভেদমান μ_2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক নয়। μ_2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে $\frac{n}{n-1} m_2$

অর্থাৎ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m'_1)^2$

অর্থাৎ σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে

$$s'^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m'_1)^2$$

এখন থেকে কাজের সুবিধার জন্য পূর্ণকের গড়কে মাপনের মূলবিন্দু ধরা হ'ল। পূর্বেও এরূপ করা যেত

$$V(m_2) = E\{m_2 - E(m_2)\}^2$$
$$= E(m_2^2) - E^2(m_2)$$

$$= E\left\{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i x_j\right\}^2$$

$$- \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \mu_2^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^2 x_j^2\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n^4}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^2 x_j^2\right] - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \mu_2^2$$

(যে সমস্ত রাশির প্রত্যাশা শূন্য তাদের না ধ'রে)

$$= \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left\{\sum_{i=1}^{n} E(x_i^4) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E(x_i^2)E(x_j^2)\right\}$$

$$+ \frac{2}{n^4}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E(x_i^2)E(x_j^2) - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \mu_2^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \mu_4 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^3 \mu_2^2 + \frac{2}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\mu_2^2$$

$$- \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \mu_2^2$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \frac{\mu_4}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{\mu_2^2}{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \frac{\mu_4-\mu_2^2}{n} + \frac{2}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\mu_2^2$$

বিকল্পে $V(s^2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \frac{\mu_4}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{\mu_2^2}{n}$

সুতরাং $V(s'^2) = \frac{\mu_4}{n} - \dfrac{1-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\,\frac{\mu_2^2}{n}$

যে পূর্ণক থেকে নমুনাটি সংগৃহীত হয়েছে সেটি যদি নর্ম্যাল গোত্রীয় হয়, তবে

$$V(s^2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \frac{3\sigma^4}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{\sigma^4}{n}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^4}{n}$$

$$\text{ও} \quad V(s'^2) = \frac{3\sigma^4}{n} - \frac{1-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\,\frac{\sigma^4}{n}$$

$$= \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

প্রমাণভ্রান্তি উপরিলিখিত ভেদমানের ধনাত্মক বর্গমূল।

13.8 অনুচ্ছেদে ও χ^2-এর বিভাজন থেকে নর্ম্যাল পূর্ণকের ক্ষেত্রে $E(s^2)$ ও $V(s^2)$-এর সূত্র নির্ধারিত হয়েছে।

13.9.3 সসীমপূর্ণক থেকে সংগৃহীত পুনঃস্থাপনা-বিহীন সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে প্রত্যাশা, প্রমাণভ্রান্তি ইত্যাদি :

সসীমপূর্ণক থেকে পুনঃস্থাপনাবিহীন সংগৃহীত নমুনার বিষয়ে কিছু আলোচনা করা যাক।

ধরলাম X_α পূর্ণকের α-তম সদস্য $\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$

$$\text{তাহলে পূর্ণকের গড় } \mu = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha$$

$$\text{ও ভেদমান } \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \mu)^2$$

ধরলাম x_i নমুনার i-তম সদস্য $\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\text{তাহলে নমুনার গড় } \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$E(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha = \mu$$

$$\begin{aligned} V(x_i) &= E\{x_i - E(x_i)\}^2 \\ &= E(x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \mu)^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{cov}\,(x_i,\ x_j)=E[\{x_i-E(x_i)\}\{x_j-E(x_j)\}]$$

$$=E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{\substack{\alpha,\,\alpha'=1\\ \alpha\neq\alpha'}}^{N}(X_\alpha-\mu)(X_{\alpha}'-\mu)$$

$$=-\frac{1}{N(N-1)}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\mu)^2$$

[যেহেতু $\displaystyle\sum_{\substack{\alpha'=1\\ \alpha'\neq\alpha}}^{N}(X_{\alpha}'-\mu)$

$$=\sum_{\alpha'=1}^{N}(X_{\alpha}'-\mu)-(X_\alpha-\mu)$$

$$=0-(X_\alpha-\mu)$$

$$=-(X_\alpha-\mu)\ ].$$

$$=-\frac{\sigma^2}{N-1}$$

(পুনঃস্থাপনাসহ সংগৃহীত নমুনার ক্ষেত্রে এর মান 0 হয়, কারণ সেক্ষেত্রে x_i ও x_j পরস্পর নিরপেক্ষ)

$$E(\bar{x})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i)$$

$$=\mu$$

$$V(\bar{x})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}V(x_i)+\sum_{\substack{i,\,j=1\\ i\neq j}}^{n}\text{cov}\,(x_i,\,x_j)\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{n\sigma^2-n(n-1)\frac{\sigma^2}{N-1}\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}.$$

সুতরাং এক্ষেত্রে $\bar{x}$-এর প্রমাণভ্রান্তি $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

দেখা যাচ্ছে যে সসীম পূর্ণক থেকে পুনঃস্থাপনা ব্যতিরেকে সংগৃহীত নমুনার গড়ের ভেদমান পুনঃস্থাপনাসহ সংগৃহীত নমুনার গড়ের ভেদমান অপেক্ষা ছোট। অবশ্য পূর্ণকের আয়তন N যত বৃদ্ধি পায় প্রথম ভেদমান ততই $\frac{\sigma^2}{n}$-এর দিকে অগ্রসর হয় এবং উভয়ের পার্থক্য ততই হ্রাস পায়।

আরও দেখা যাচ্ছে যে, যখন নমুনার আয়তন n পূর্ণকের আয়তন N-এর সমান হয়, তখন পুনংস্থাপনা ব্যতিরেকে সংগৃহীত নমুনার গড়ের ভেদমান থাকে না—এটা খুবই স্বাভাবিক কারণ সেক্ষেত্রে নমুনার সঙ্গে পূর্ণকের কোন প্রভেদ থাকে না এবং নমুনার গড় সেক্ষেত্রে পূর্ণকের গড়ে অর্থাৎ একটি ধ্রুবকে পরিণত হয়। যাই হোক পুনঃস্থাপনাসহ সংগৃহীত নমুনার ক্ষেত্রে এরূপ হয় না এবং স্বাভাবিকভাবে সেটাই আশা করা যায়, কারণ সেক্ষেত্রে n যত বড়ই হোক না কেন নমুনার লক্ষণ ও পূর্ণকের লক্ষণের মধ্যে অভেদ প্রায় অবশ্যম্ভাবী।

$\frac{N-n}{N-1}$ উৎপাদকটিকে সসীম পূর্ণকের জন্য শুদ্ধিকরণ উৎপাদক (finite population correction বা $f. p. c.$) বলা হয়।

13.9.4 নমুনালব্ধ ভগ্নাংশের প্রত্যাশা, প্রমাণভ্রান্তি ইত্যাদি :

ধরলাম N আয়তনের একটি পূর্ণককে কোনও একটি বিশেষ ধর্মের (যথা A-র) উপস্থিতি বা অনুপস্থিতির দিক থেকে দুইটি শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়েছে এবং ধরলাম শ্রেণী দুইটিতে ঐ অংশদ্বয়ের মান যথাক্রমে P ও $Q\,(=1-P)$।

ধরলাম ঐ পূর্ণক থেকে n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা আহৃত হয়েছে এবং ঐ নমুনাতে অনুরূপ শ্রেণী দুইটিতে অর্থাৎ A ধর্মের উপস্থিতি ও অনুপস্থিতির অংশদ্বয়ের মান যথাক্রমে p ও $q\,(=1-p)$।

পূর্ণকের α-তম সদস্যের সঙ্গে একটি চল X_α যুক্ত করা হ'ল যার মান 1 হবে যখন সদস্যটি A ধর্মাবলম্বী হয় এবং 0 হবে অন্যথায়। অনুরূপভাবে নমুনাতে i-তম সদস্যের সঙ্গে একটি চল x_i যুক্ত করা হ'ল যার মান 1 হবে যখন সদস্যটি A ধর্মাবলম্বী হয় এবং 0 হবে অন্যথায়।

তাহলে
$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha = P$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \mu)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha^2 - \mu$$

$$= P - P^2$$

$$= P(1-P)$$

$$= PQ$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = p$$

তাই অনুচ্ছেদ 13.9.3-র সূত্রগুলি ব্যবহার ক'রে পাওয়া যাচ্ছে

$$E(p) = P$$

এবং $V(p) = \frac{N-n}{N-1}.\frac{PQ}{n}$, যখন সসীম পূর্ণক থেকে পুনঃস্থাপনাবিহীন নমুনা সংগৃহীত হয়

ও $= \frac{PQ}{n}$, যখন অসীম পূর্ণক থেকে নমুনা সংগৃহীত হয় বা সসীম পূর্ণক থেকে পুনঃস্থাপনাসহ নমুনা সংগৃহীত হয়।

পূর্ণকটি যদি দুই শ্রেণীতে বিভক্ত না হয়ে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও পরস্পর নিঃশেষী k শ্রেণীতে বিভক্ত হয় এবং বিভিন্ন শ্রেণীর অংশগুলির মান যদি যথাক্রমে $P_1, P_2,\ldots, P_k\left(\sum_{i=1}^{k} P_i = 1\right)$ হয় এবং নমুনাতে অনুরূপ অংশগুলির মান যদি

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ হয়, তবে নমুনালব্ধ বিভিন্ন অংশের মানের প্রত্যাশা, ভেদমান ইত্যাদি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়।

এখানে অসীম পূর্ণক থেকে সংগৃহীত বা সসীম পূর্ণক থেকে পুনঃস্থাপনাসহ সংগৃহীত নমুনার বিষয়টি আলোচিত হচ্ছে। পুনঃস্থাপনাবিহীন নমুনার ক্ষেত্রে ভেদমান বা সহভেদমানকে সসীম পূর্ণকের জন্য শুদ্ধিকরণ উৎপাদক $(N-n)/(N-1)$ দিয়ে গুণ করলেই চলবে।

স্পষ্টতঃ $$E(p_i) = P_i$$

$$V(p_i) = \frac{P_i(1-P_i)}{n}$$

আবার $$E(p_i + p_j) = P_i + P_j$$

$$V(p_i + p_j) = \frac{(P_i + P_j)(1 - P_i - P_j)}{n}$$

কারণ $p_i + p_j$-ও একটি অংশের মান

$$V(p_i) + V(p_j) + 2 \operatorname{cov}(p_i, p_j) = \frac{(P_i + P_j)(1 - P_i - P_j)}{n}$$

বা $$\frac{P_i(1-P_i)}{n} + \frac{P_j(1-P_j)}{n} + 2 \operatorname{cov}(p_i, p_j) = \frac{(P_i + P_j)(1 - P_i - P_j)}{n}$$

সুতরাং $\operatorname{cov}(p_i, p_j)$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(P_i + P_j) - (P_i + P_j)^2}{n} - \frac{P_i(1-P_i)}{n} - \frac{P_j(1-P_j)}{n}\right\} = -\frac{P_i P_j}{n}$$

আবার যদি $E(n_i) = m_i$ হয় তবে

$$V(n_i) = \frac{m_i(n - m_i)}{n}$$

$$\operatorname{cov}(n_i, n_i') = -\frac{m_i m_i'}{n}$$

এবারে ধরিলাম
$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i n_i \\ x' &= \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i n_i \end{aligned}\right\}$$

অর্থাৎ x ও x' নমুনালব্ধ পরিসংখ্যাগুলির দুইটি ঋজুরৈখিক অপেক্ষক।

সুতরাং $$E(x)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i n_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E(n_i)$$

$$=n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i$$

$$V(x)=V\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i n_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 V(n_i)+\sum_{\substack{i,\,i'=1\\ i\neq i'}}^{k}\lambda_i\lambda_i'\ \mathrm{cov}\ (n_i,\,n_i')$$

$$=n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 P_i(1-P_i)-n\sum_{\substack{i,\,i'=1\\ i\neq i'}}^{k}\lambda_i\lambda_i'\ P_i\ P_i'$$

$$=n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 P_i-n\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\ P_i\right)^2$$

এখন $E(x)$ যদি 0 হয় তবে

$$V(x)=n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 P_i$$

$$\mathrm{cov}\ (x,\,x')=\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i n_i,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda'_i n_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\lambda'_i\ V(n_i)+\sum_{\substack{i,\,i'=1\\ i\neq i'}}^{k}\lambda_i\lambda_i'\ \mathrm{cov}\ (n_i,\,n_i')$$

$$= n\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda'_i P_i(1-P_i) - n\sum_{\substack{i,i'=1\\ i\neq i'}}^{k} \lambda_i \lambda'_{i'} P_i P_{i'}$$

$$= n\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda'_i P_i - n\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda'_i P_i\right)$$

এখন যদি $E(x)$ ও $E(x')$-এর অন্ততঃ একটি 0 হয় তবে

$$\text{cov}(x, x') = n\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda'_i P_i$$

[m'_r-কে $\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^r$ ও μ'_r-কে $\sum_i P_i x_i^r$ লিখে উপরিলিখিত সূত্রপ্রয়োগে $V(m'_r)$ বের করা যায়। অনুরূপভাবে $\text{cov}(m'_r, m'_s)$-ও বের করা যায়।]

অনুশীলনী

13.1 সংজ্ঞা লেখ : পূর্ণক ও নমুনা, পূর্ণকাঙ্ক ও নমুনাঙ্ক।

13.2 সমসম্ভব নমুনা কাকে বলে ? এর প্রয়োজনীয়তা কী।

13.3 নমুনাজ বিভাজন ও প্রমাণভ্রান্তি বুঝিয়ে লেখ।

13.4 যদি x-এর বিভাজন $N(m, \sigma^2)$ হয়, তবে $\frac{x-m}{\sigma}$-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.5 যদি x_i-এর বিভাজন $N(0, 1)$, $(i=1, 2,\ldots, n)$ হয় এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে y_i $(i=1, 2,\ldots, n)$-এর প্রত্যেকের বিভাজন নির্ণয় কর, যেখানে x_i ও y_i $(i=1. 2,\ldots, n)$ প্রতিলম্ব রূপান্তর দ্বারা সম্পর্কযুক্ত।

13.6 যদি x_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চল হয় যাদের গড় μ_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ এবং ভেদমান σ_i^2 $(i=1, 2,\ldots, n)$ তবে $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ (অন্ততঃ একটি b-এর মান শূন্য নয়) এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.7 প্রমাণ কর যে, প্রমাণ নর্ম্যাল চলের বর্গ এক স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে।

13.8 প্রমাণ কর যে, যদি x ও y দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ চল χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে যাদের স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যথাক্রমে n_1 ও n_2 তবে $(x+y)$-এর বিভাজন (n_1+n_2) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন হবে।

13.9 যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চল হয় যাদের গড় μ ও ভেদমান σ^2 এবং যদি

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - \overline{n-1}\, x_n)$$

হয়, তবে দেখাও যে $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চল হবে যাদের গড় 0 ও ভেদমান σ^2.

13.10 যদি $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ একই গড় ও একই ভেদমান বিশিষ্ট পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল চল হয় তবে নীচের অপেক্ষক দুইটির বিভাজন নির্ণয় কর।

(i) $\frac{1}{2n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{2n})$

(ii) $(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n})^2$

13.11 যদি $p_1, p_2, \ldots, p_k$ প্রত্যেকে 0 থেকে 1 পর্যন্ত প্রসারে আয়ত নিবেশন অনুসরণ করে এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$-2 \log \prod_{i=1}^{k} p_i$-এর নিবেশন $2k$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 নিবেশন হবে।

13.12 যদি X_1 ও X_2 পরস্পর নিরপেক্ষ যথাক্রমে n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $X_1 + X_2$ ও $\frac{X_1}{X_2}$ পরস্পর নিরপেক্ষ।

13·13 যদি x-এর বিভাজন $dF = \frac{a^p}{\lceil p} e^{-aX} x^{p-1}\, dx$ এবং y-এর বিভাজন $dF = \frac{a^q}{\lceil q} e^{-aX} x^{q-1}\, dx$ হয়, তবে $u = x + y$, $v = \frac{x}{x+y}$ এবং $w = \frac{v}{1-v} = \frac{x}{y}$-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.14 যদি x_i এবং y_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ দুই দল পরস্পর নিরপেক্ষ প্রমাণ নর্ম্যাল চল হয়, তা হলে $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$-এর বিভাজন নির্ণয় কর, যেখানে

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ ও } \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

13.15 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ প্রমাণ নর্ম্যাল চল হলে নিম্নলিখিত বিভাজনগুলি নির্ণয় কর।

(i) $$L=\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (m < n)$$

(ii) $$L_0=n\bar{x}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{যেখানে } \bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i/n$$

(iii) $$L'=\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

13.16 যদি χ_1^2 ও χ_2^2 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 চল হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\sqrt{n}\,(\chi_1^2-\chi_2^2)}{2\sqrt{\chi_1^2\chi_2^2}}$$

n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন অনুসরণ করবে এবং এ $\chi_1^2+\chi_2^2$-এর নিরপেক্ষ হবে।

13.17 ধর প্রত্যেক x_i-এর বিভাজন $N(m, \sigma_i^2)$, $i=1, 2,\ldots, n$ এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ। যদি

$$\bar{x}_w=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}$$

হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}(x_i-\bar{x}_w)^2$$

χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে যার স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(n-1)$.

এ থেকে প্রমাণ কর যে, যদি x_i-এর বিভাজন $N(m, \sigma^2)$, $i=1, 2,\ldots, n$ হয়, এবং

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$$

হয়, তবে
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/\sigma^2$$

এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 হবে।

13.18 যদি x, y ও z $(x, y, z > 0)$ এর যৌথ বিভাজন

$$dF = \frac{c}{(1+x+y+z)^4}\, dx\, dy\, dz \text{ হয়,}$$

তবে দেখাও যে, c-এর মান 6 এবং $R = x+y+z$-এর বিভাজন

$$dF = \frac{3R^2}{(1+R)^4}.$$

13.19 χ^2 বিভাজনের সঙ্গে গামা বিভাজন এবং t ও F বিভাজনের সঙ্গে বিটা বিভাজন কী ভাবে যুক্ত তা দেখাও।

13.20 দেখাও যে χ^2, t ও F বিভাজন পিয়ারসন প্রবর্তিত তৃতীয়, সপ্তম ও ষষ্ঠ প্রকার বিভাজনের পর্যায়ে পড়ে।

13.21 x যদি একটি n ও P পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\text{Prob}\,[x \leqslant r] = \text{Prob}\left[\, F > \frac{n-r}{r+1}\,\frac{P}{1-P}\right]$$

যেখানে F বিভাজন $2(r+1)$ ও $2(n-r)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত।

13·22 x যদি একটি λ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পোয়াসঁ চল হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\text{Prob}\,[x \leqslant r] = \text{Prob}\,[\chi^2 > 2\lambda]$$

যেখানে χ^2 বিভাজন $2(r+1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত।

13.23 প্রমাণ কর যে, পুনঃস্থাপনাসহ n আয়তনের সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনাজ অংশের মানের প্রমাণ বিচ্যুতি $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ এর বেশী হতে পারে না।

13.24 ধর $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত একটি সমসম্ভব নমুনা এবং $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^r$, যেখানে μ পূর্ণকের গড়।

$F(M_r)$, $V(M_r)$ এবং cov (M_r, M_s) কত হবে ?

নর্ম্যাল পূর্ণকের ক্ষেত্রে M_2, M_3 ও M_4-এর প্রত্যাশা, ভেদমান ও যে কোন দুইটির মধ্যে সহভেদমান কী হবে ?

13.25 (i) ধর x_1 ও x_2 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ চল যাদের গড় যথাক্রমে μ_1 ও μ_2 এবং ভেদমান যথাক্রমে σ_1^2 ও σ_2^2। দেখাও যে,

$$E(x_1 x_2) = \mu_1 \mu_2$$
$$V(x_1 x_2) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2$$
$$\text{cov}(x_1, x_1x_2) = \mu_2\sigma_1^2$$

(ii) x_3 যদি অপর একটি নিরপেক্ষ চল হয় যার গড় μ_3 ও ভেদমান σ_3^2, তবে দেখাও যে,

$$\text{cov}(x_1x_2, x_1x_3) = \mu_2\mu_3\sigma_1^2$$

13.26 X যদি Y ও Z-এর নিরপেক্ষ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\text{cov}(Y, XZ) = E(X)\,\text{cov}(Y, Z)$

(ii) $\text{cov}(XY, XZ) = E^2(X)\,\text{cov}(Y, Z) + E(Y)\,E(Z)V(X) + V(X)\,\text{cov}(Y, Z)$

13.27 যদি m_1' ও m_2 পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত n আয়তনের সমসম্ভব নমুনার গড় ও ভেদমান হয়, তবে

$E(m_1')$, $V(m_2)$ এবং cov (m_1', m_2) নির্ণয় কর।

নর্ম্যালপূর্ণকে এদের মান কত হবে ?

প্রমাণ কর যে, কোন প্রতিসম বিভাজনের ক্ষেত্রে m_1' ও m_2-এর মধ্যে সহগাঙ্ক শূন্য।

13.28 ধর N আয়তনের একটি সসীম পূর্ণকের অবেক্ষণগুলি $X_a (a = 1, 2, \ldots, N)$ এবং এ থেকে সংগৃহীত n আয়তনের সমসম্ভব নমুনার অবেক্ষণগুলি $x_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$

আরও ধর $\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}X_\alpha$ ও $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\bar{X})^2 \text{ ও } s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

প্রমাণ কর যে পুনঃস্থাপনাসহ সংগৃহীত নমুনার ক্ষেত্রে

$$E(\bar{x})=\bar{X}$$

$$V(\bar{x})=\frac{N-1}{N}\,\frac{S^2}{n}$$

$$E(s^2)=\frac{N-1}{N}\,S^2$$

এবং পুনঃস্থাপনাবিহীন সংগৃহীত নমুনার ক্ষেত্রে

$$E(\bar{x})=\bar{X}$$

$$V(\bar{x})=\frac{N-n}{N}\,\frac{S^2}{n}$$

$$E(s^2)=S^2.$$

13.29 প্রমাণ কর যে m_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ n সংখ্যক দ্বিপদ চলের যোগফল $\sum_{i=1}^{n}m_i$ ও p পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ চল হবে।

13.30 প্রমাণ কর যে λ_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পরস্পর নিরপেক্ষ n সংখ্যক পোয়াসঁ চলের যোগফল $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পোয়াসঁ চল হবে।

13.31 n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F-এর বিভাজন থেকে দেখাও যে $\frac{1}{F}$-এর বিভাজন n_2 ও n_1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন হবে।

13.32 13.8.2 অনুচ্ছেদে বর্ণিত $\bar{x}$ ও s'-এর যৌথ বিভাজন থেকে 'স্টুডেণ্টে t'-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.33 13.8.3 অনুচ্ছেদে বর্ণিত $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s'_1 ও s'_2-এর যৌথ বিভাজন থেকে 'ফিশারের t'-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.34 13.8.4 অনুচ্ছেদে বর্ণিত $\bar{v}$ ও s'_v-এর যৌথ বিভাজন নির্ণয় কর, তা হতে 'স্টুডেন্টের যুগ্ম t'-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.35 13.8.5 অনুচ্ছেদে বর্ণিত b ও s'-এর যৌথ বিভাজন থেকে সেই অনুচ্ছেদের t-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

13.36 13.8.6 অনুচ্ছেদে বর্ণিত s'_1 ও s'_2-এর যৌথ বিভাজন থেকে F-এর বিভাজন নির্ণয় কর।

নির্দেশিকা

1. Goon, A. M., Gupta, M. K. & Dasgupta, B. *Fundamentals of statistics*, Vol. I (Ch. 14). World Press, 1971.

2. ———— *An Outline of statistical Theory*, (Ch. 10). World Press, 1970.

3. Hogg, R. V. & Craig, A. T. *Indroduction to Mathematical Statistics*, (Chs. 3, 7). Macmillan, 1965.

4. Mood, A. M. & Graybill, F. A. *Introduction to the Theory of Statistics*, (Ch. 10). McGraw Hill, 1963.

5. Rao, C. R. *Advanced Statistical Methods in Biometric* Research, (Ch. 2). John Wiley, 1952.

14 রাশিবিজ্ঞান ভিত্তিক অনুমানতত্ত্ব
(Theory of statistical Inference)

14.1 ভূমিকা :

পূর্বেই বলা হয়েছে যে নমুনা পূর্ণকের একটি অংশমাত্র। সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনাতত্ত্বের উপর নির্ভর ক'রে পূর্ণকের প্রকৃতি সম্বন্ধে কিছু আন্দাজ করা যায়। জানা নমুনা থেকে অজানা পূর্ণকের সম্বন্ধে ধারণা করা নিয়ে যে বিজ্ঞানসম্মত তত্ত্ব গড়ে উঠেছে তারই নাম রাশিবিজ্ঞানে অনুমানতত্ত্ব।

এই অনুমানতত্ত্বকে সাধারণতঃ প্রধান দুইভাগে ভাগ করা যায়, যথা :

(1) পূর্ণকের এক বা একাধিক পূর্ণকাঙ্ক অজানা থাকতে পারে। নমুনার উপর নির্ভর ক'রে এই সমস্ত অজানা পূর্ণকাঙ্কের পরিমাপ জানবার প্রয়োজন হতে পারে। যে পদ্ধতি অবলম্বনে এই সমস্ত পরিমাপ সম্বন্ধে ধারণা করা যায় তারই নাম প্রাক্কলন পদ্ধতি (method of estimation).

(2) পূর্ণকের এক বা একাধিক পূর্ণকাঙ্ক সম্বন্ধে কোন প্রকল্প দেওয়া থাকতে পারে। নমুনার উপর নির্ভর ক'রে এই সমস্ত প্রকল্পের সত্যতা/অসত্যতা বিচার করবার প্রয়োজন হতে পারে। যে পদ্ধতি অবলম্বনে এরূপ বিচার সাধন করা যায় তারই নাম প্রকল্প বিচার পদ্ধতি (method of testing of hypothesis)। প্রকল্প বিচারের অপর নাম সংশয় বিচার, কারণ এখানে প্রকল্প সম্বন্ধে যে সংশয় থাকে তারই বিচার করা হয়।

এই পরিচ্ছেদে উভয়ক্ষেত্রেই পূর্ণকের গাণিতিক রূপ জানা আছে বলে ধরা হবে। কোন নির্দিষ্ট প্রসঙ্গে অবশ্য এই গাণিতিক রূপ জানা না থাকলেও চলতে পারে। এই গাণিতিক রূপ সম্বন্ধেও প্রকল্প বিচার করবার প্রয়োজন হতে পারে —সেটা অবশ্য বর্তমান পরিচ্ছেদে আলোচনা করা হবে না।

প্রথমে প্রাক্কলন পদ্ধতির বিষয় আলোচনা করা যাক। প্রাক্কলন দুই ধরনের হতে পারে, যথা (ক) বিন্দু প্রাক্কলন (point estimation) এবং (খ) অন্তর প্রাক্কলন (interval estimation)

নমুনাজ অবেক্ষণসমূহের উপর নির্ভর ক'রে তাদের একটি অপেক্ষক নির্ধারণ করা যেতে পারে যা পূর্ণকাঙ্কের প্রাক্কলনীমাপ-বিশেষ। আবার এদের দুইটি

অপেক্ষকও নির্ধারণ করা যেতে পারে যাদের অন্তর্গত প্রসারের মধ্যে পূর্ণকাঙ্কটি থাকবার সম্ভাবনা খুব বেশী। প্রথম পদ্ধতিকে বলা হয় বিন্দু প্রাক্কলন পদ্ধতি এবং দ্বিতীয় পদ্ধতিকে বলা হয় অন্তর প্রাক্কলন পদ্ধতি।

14.2 বিন্দু প্রাক্কলন :

ধরা যাক θ একটি পূর্ণকাঙ্ক। এর প্রাক্কলনের জন্য যদি নমুনাঙ্ক T ব্যবহার করা হয়, তবে T-কে বলা হয় θ-র প্রাক্কলক (estimator) এবং কোন বিশেষ নমুনালব্ধ T-র মানকে বলা হয় প্রাক্কলনী মান (estimate)।

নীচে উৎকৃষ্ট প্রাক্কলকের দুইটি বিশেষ লক্ষণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হচ্ছে।

(A) লঘিষ্ঠ-ভেদমান পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক (Minimum variance unbiassed estimator).

T-র মধ্যগামিতার মাপ, সাধারণতঃ প্রত্যাশা, অর্থাৎ $E(T)$ যদি θ-র সমান হয় তবে T-কে θ-র পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলে।

সমস্ত পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকের মধ্যে যার বিস্তৃতি, সাধারণতঃ ভেদমান, সবচেয়ে কম, অর্থাৎ যার ভেদমান অন্য যে কোন পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকের ভেদমানের চেয়ে ছোট তাকেই বলে লঘিষ্ঠ-ভেদমান পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

রাও-ক্রামেরের (Rao-Cramer's) সূত্রানুযায়ী θ-র পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক সমূহের ভেদমানের অধঃসীমা হ'ল (সামান্য কয়েকটি শর্তাধীনে)

$$\frac{1}{E\left(\frac{d \log L}{d\theta}\right)^2} \quad \text{বা} \quad \frac{1}{-E\left(\frac{d^2 \log L}{d\theta^2}\right)}$$

(L-এর বিষয় অনুচ্ছেদ 14.3-তে দ্রষ্টব্য)

$\{E(T)-\theta\}$-কে বলা হয় পক্ষপাত (bias)-এর পরিমাণ। যদি এ ধনাত্মক হয়, তবে পক্ষপাতকে ধনাত্মক বলা হয়, নতুবা একে ঋণাত্মক বলা হয়।

(B) সমঞ্জস ও দক্ষ প্রাক্কলক (Consistent and efficient estimator)

নমুনার আয়তন n যখন ∞-র দিকে ধাবিত হয় তখন যদি T-এর θ-র দিকে সম্ভাবনাতাত্ত্বিক অভিসরণ ঘটে, তবে T-কে θ-র সমঞ্জস প্রাক্কলক বলে। অর্থাৎ যত খুশী ছোট দুটি ধনরাশি ε ও η দেওয়া থাকুক না কেন তাদের উপর নির্ভর ক'রে যদি একটি n_0 বের করা সম্ভব হয় যাতে যখনই $n > n_0$ হয় তখনই

$$P(|T-\theta| < \varepsilon) > 1-\eta$$

হয়, তবে T-কে θ-র সমঞ্জস প্রাক্কলক বলে।

দেখানো যেতে পারে যে T-কে θ-র সমঞ্জস প্রাক্কলক হতে হলে নীচের শর্তদ্বয়ই পর্যাপ্ত :

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ E(T)\rightarrow\theta\\(ii)\ V(T)\rightarrow 0\end{array}\right\}\quad \text{যখন } n\rightarrow\infty$$

কোন পূর্ণকাঙ্কের একাধিক সমঞ্জসে প্রাক্কলক থাকতে পারে; বস্তুতঃ T যদি একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক হয়, তবে $\left\{T+\frac{C}{\phi(n)}\right\}$ও একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক, যখন C একটি ধ্রুবক যা n-এর উপর নির্ভর করে না এবং $\phi(n)$ n-এর একটি ক্রমবর্ধমান (monotonic increasing) অপেক্ষক।

সমস্ত সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে যার ক্রমাসন্ন ভেদমান সবচেয়ে কম অর্থাৎ যার ক্রমাসন্ন ভেদমান অন্য যে কোন সমঞ্জস প্রাক্কলকের ক্রমাসন্ন ভেদমান থেকে ছোট তাকেই বলে দক্ষ সমঞ্জস প্রাক্কলক।

(সমস্ত সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে যার ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল তাদের কথাই এখানে বলা হয়েছে, কারণ সেক্ষেত্রে অভিসরণের গতিবেগ ভেদমানের অন্যোন্যক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।)

অন্য প্রাক্কলককে বলা হয় অদক্ষ প্রাক্কলক। ঐরূপ কোন অদক্ষ প্রাক্কলকের, দক্ষতা (efficiency)

$$=\frac{\text{দক্ষ প্রাক্কলকের ক্রমাসন্ন ভেদমান}}{\text{অদক্ষ প্রাক্কলকটির ক্রমাসন্ন ভেদমান}}$$

(এখানে বৃহৎ নমুনাভিত্তিক ক্রমাসন্ন দক্ষতার কথাই বলা হয়েছে। প্রকৃত বা যথার্থ দক্ষতার সংজ্ঞা এখানে দেওয়া হ'ল না বা সে সম্বন্ধে কোন আলোচনাও এখানে করা হ'ল না।)

14.2.1 পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক (Sufficient statistic) :

এখন পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক সম্বন্ধে কিছু বলে রাখতে চাই।

নমুনাঙ্ক T দেওয়া থাকলে অন্য কোন নমুনাঙ্কের শর্তাধীন-বিভাজন যদি θ-নিরপেক্ষ হয়, তবে T-কে θ-র পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক বলে, অর্থাৎ T' যদি অপর একটি নমুনাঙ্ক হয়, যা T-র কোন অপেক্ষক নয়, তবে T ও T'-এর যৌথ বিভাজন সেক্ষেত্রে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :

$$dF=f_1(T,\theta)\,f_2\,(T,T')\,dT\,dT' \qquad [\,f_2 \text{ যেখানে } \theta\text{-নিরপেক্ষ}\,]$$

T দেওয়া থাকলে T' θ-র সম্বন্ধে নতুন কোন তথ্যের সন্ধান দিতে পারে না। নমুনা থেকে θ সম্বন্ধে যতটুক তথ্যের সন্ধান পাওয়া সম্ভব তার সবটুকুই T দেয় এবং অপর কোন নমুনাঙ্ক এর বেশী কিছু দিতে পারে না।

T-কে θ-র পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক হতে হলে প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তটি এই যে, $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর সম্ভাবনাভর বা সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের চেহারা নীচের মতো হবে,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta) = f_1(T, \theta) f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

যেখানে অবশ্য $T = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

(অর্থাৎ যেখানে f_1 অপেক্ষকে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ কেবলমাত্র T-র আকারেই থাকে ও f_2-তে θ থাকে না), অথবা

$$\log f(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta| = \log f_1(T, \theta) + \log f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

অর্থাৎ অন্তর্কলক বর্তমান থাকলে

$$\frac{d}{d\theta} \log f(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta) = \phi(T, \theta)$$

অর্থাৎ $$\frac{d}{d\theta} \log L = \phi(T, \theta)$$

(L-এর বিষয় অনুচ্ছেদ 14.3-তে দ্রষ্টব্য।)

মনে রাখতে হবে যে পর্যাপ্ততা প্রাক্কলকের ধর্ম নহে। এটা নমুনাঙ্কের ধর্ম মাত্র এবং একে নমুনাস্থিত তথ্য সংক্ষেপীকরণের একটি মাধ্যম হিসাবে দেখা যেতে পারে।

বস্তুতঃ যখন পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক বর্তমান থাকে, তখন তার অপেক্ষকের মধ্য থেকে সন্তোষজনক প্রাক্কলক খুঁজে বের করতে হবে।

14.3 গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতি (Maximum likelihood estimation) :

নানাবিধ প্রাক্কলন পদ্ধতি প্রচলিত রয়েছে। তন্মধ্যে গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতি সবচেয়ে সহজ অথচ খুবই গুরুত্বপূর্ণ, কারণ এই পদ্ধতি অনেকগুলি অভিপ্রেত লক্ষণের অধিকারী। সেই গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতির বিষয়েই নীচে আলোচনা করা হচ্ছে। (অপরাপর পদ্ধতির বিষয় এখানে আলোচনা করা হ'ল না।)

ধরলাম $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর সম্ভাবনা ভর বা সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta)$। এখানে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ দেওয়া থাকায় একে θ-র অপেক্ষকরূপে গণ্য করা যেতে পারে এবং একে বলা হয় θ-র আশংসা অপেক্ষক। আশংসা অপেক্ষককে $L(\theta)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতি অনুসারে $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর উপর নির্ভরশীল θ-র যে মানের জন্য $L(\theta)$ গরিষ্ঠ হবে, তাই হবে θ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক। একে $\hat{\theta}$ দ্বারা সূচিত করা হয়, অর্থাৎ

$$L(\hat{\theta}) = \max L(\theta).$$

এখন θ-র যে মানের জন্য, $L(\theta)$ গরিষ্ঠ হয় সেই মানের জন্য $\log L(\theta)$ও গরিষ্ঠ, কারণ $\log x$, x-এর একটি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক। তাই অনেক ক্ষেত্রে সুবিধার জন্য $L(\theta)$ নিয়ে বিচার না ক'রে $\log L(\theta)$ নিয়ে বিচার করা হয়। সেক্ষেত্রে

$$\log L(\hat{\theta}) = \max \log L(\theta)$$

অন্তর্কলক বর্তমান থাকলে নিম্নলিখিত উপায়ে $\hat{\theta}$ বের করা যায়, যথা—

$$\frac{d\,L(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{বা} \quad \frac{d \log L(\theta)}{d\theta} = 0\text{-কে}$$

θ-বিষয়ক সমীকরণ বলে গণ্য ক'রে তার কোনও বীজ $\hat{\theta}$-কে θ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বলে ধরা যায়।

অবশ্য পরীক্ষা ক'রে দেখতে হবে যে, θ-র মান $\hat{\theta}$ বসালে যেন

$$\frac{d^2 L(\theta)}{d\theta^2} \quad \text{বা} \quad \frac{d^2 \log L(\theta)}{d\theta^2}$$ ঋণরাশি হয়; কারণ অন্যথায় $\hat{\theta}$-র জন্য $L(\hat{\theta})$ গরিষ্ঠ হবে না।

উপরিলিখিত সমীকরণের সমাধান থেকে θ-র যে মান পাওয়া যাবে তাতে $L(\theta)$ স্থানীয়ভাবে গরিষ্ঠ হবে। দেখতে হবে θ-র ঐ মানের জন্য $L(\theta)$ যেন অনাপেক্ষিক (absolute বা global) গরিষ্ঠ হয়।

গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলকের কয়েকটি লক্ষণের কথা নীচে বলা হচ্ছে।

(i) সাধারণ কয়েকটি শর্ত-সাপেক্ষে গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক সমঞ্জস হয়।

(ii) সাধারণ কয়েকটি শর্ত-সাপেক্ষে গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক ক্রমাসন্ন নর্ম্যাল নিবেশন অনুসরণ করে।

(iii) সাধারণতঃ গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক অন্ততঃ ক্রমাসন্নভাবে দক্ষ হয়।

(iv) যদি কোন পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক থাকে, তবে গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক সেটি বা তার কোন অপেক্ষক হয়।

(v) θ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক যদি $\hat{\theta}$ হয়, তবে θ-র ঐকৈক পারম্পর্য সমন্বিত কোন অপেক্ষকের আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\theta}$-র অনুরূপ অপেক্ষক হয়। একে বলে অপরিবর্তনীয়তা (invariance) লক্ষণ।

(vi) গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলকের একমাত্র ত্রুটি যে, এ অনেকক্ষেত্রে পক্ষপাত-শূন্য হয় না। অবশ্য সাধারণতঃ একে সামান্য পরিবর্তন করলেই পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক পাওয়া যায়।

উদাহরণস্বরূপ নীচে কয়েকটি গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলকের আলোচনা করা যাচ্ছে।

14.3.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম কোন পূর্ণকে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের অংশের মান P এবং ঐ পূর্ণক থেকে n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। ধরা যাক ঐ নমুনাতে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের সংখ্যা r, অর্থাৎ বেরণুলির n সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ পরীক্ষায় r বার সাফল্যলাভ করা গেল। প্রতি পরীক্ষায় কৃতকার্যলাভের সম্ভাবনা P ধরা যাক।

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে P-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হবে।

P-র আশংসা অপেক্ষক $L(P)=\binom{n}{r}(1-P)^{n-r}P^r$

স্থতরাং $$\log L(P)=\text{ধ্রুবক}+(n-r)\log(1-P)+r\log P$$

(এখানে লগারিদ্‌ম-এর নিধান e ধরা হয়েছে, অন্য কিছুও ধরা যেত।)

P-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হলে আমাদের $\frac{d\log L(P)}{dP}=0$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে।

$$\frac{d\log L(P)}{dP}=0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad -\frac{n-r}{1-P}+\frac{r}{P}=0$$

$$\text{অর্থাৎ } r(1-P)-P(n-r)=0$$

$$\text{বা} \quad P=\frac{r}{n}.$$

সুতরাং P-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{P}=p=\frac{r}{n}$ অর্থাৎ নমুনালব্ধ কৃতকার্যতার অংশের মান।

এখন সন্তোষজনক প্রাক্কলকের অভিপ্রেত লক্ষণের দিক থেকে এই প্রাক্কলকটিকে বিচার করা যাক। (অবশ্য গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক ঐ সকল লক্ষণের অনেকগুলি পালন করবে।)

পূর্বেই দেখানো হয়েছে $E(p)=P$

সুতরাং নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আরও দেখানো হয়েছে $V(p)=\frac{P(1-P)}{n}$

এখন
$$\frac{d^2 \log L}{dP^2}=-\frac{n-r}{(1-P)^2}-\frac{r}{P^2}$$

সুতরাং
$$E\left[\frac{d^2 \log L}{dP^2}\right]=-\frac{n-E(r)}{(1-P)^2}-\frac{E(r)}{P^2}$$
$$=-\frac{n-nP}{(1-P)^2}-\frac{nP}{P^2}$$
$$=-\frac{n}{1-P}-\frac{n}{P}$$
$$=-\frac{n}{P(1-P)}$$

তাই রাও ক্রামেরের সূত্রানুযায়ী পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকসমূহের ভেদমানের অধঃসীমা $\frac{P(1-P)}{n}$; ভেদমানের এই অধঃসীমা গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক p গ্রহণ করে। সুতরাং নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-র একটি লঘিষ্ঠ ভেদমান যুক্ত পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আবার
$$E(p)=P$$
$$V(p)=0, \text{ যখন } n \to \infty$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-র একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক।

দেখানো যেতে পারে যে, p-র ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল। আরও দেখান যেতে পারে যে এইজাতীয় সমুদয় সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে p-রই ক্রমাসন্ন ভেদমান সবচেয়ে ছোট। তাই নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-র সমঞ্জস ও দক্ষ প্রাক্কলক।

আবার $$\frac{d \log L(P)}{dP} = -\frac{n-r}{1-P} + \frac{r}{P}$$

$$= -\frac{n(1-p)}{1-P} + \frac{np}{P}$$

$$= n\left(\frac{p}{P} - \frac{1-p}{1-P}\right) = \theta(p, P)$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-র পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক।

তাই দেখা যাচ্ছে যে নমুনাঙ্ক p পূর্ণকাঙ্ক P-র জন্য পর্যাপ্ত এবং এটি P-র ভেদমান-যুক্ত, পক্ষপাতশূন্য, সমঞ্জস, ক্রমাসন্ন-নর্ম্যালনিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

14.3.2 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ পূর্ণকাঙ্ক λ সম্বলিত পোয়াসঁ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। λ-র গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হবে।

λ-র আশংসা অপেক্ষক $$L(\lambda) = \frac{\exp[-n\lambda]\, \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i\,!}$$

সুতরাং $$\log L(\lambda) = \text{ধ্রুবক} - n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \lambda.$$

(পূর্বের ন্যায় এখানেও লগারিদ্‌মের নিধান e ধরা হয়েছে।)

λ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হলে আমাদের $\frac{d \log L(\lambda)}{d\lambda} = 0$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে।

$$\frac{d \log L(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

সুতরাং λ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\lambda} = \bar{x}$ অর্থাৎ নমুনাজ গড়

এখন পূর্বের ন্যায় এবারেও সন্তোষজনক প্রাক্কলকের অভিপ্রেত ধর্মের দিক থেকে এই প্রাক্কলকটিকে বিচার করা যাক। (অবশ্য গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক ঐ সকল ধর্মের অনেকগুলিই পালন করবে।)

$$E(\bar{x})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i)$$

$$=\lambda$$

তাই নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

$$V(\bar{x})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(x_i)$$

$$=\frac{\lambda}{n}$$

এখন $\frac{d^2\log L(\lambda)}{d\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$

সুতরাং $E\left[\frac{d^2\log L(\lambda)}{d\lambda^2}\right]=-\frac{1}{\lambda^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}E(x_i)$$

$$=-\frac{n}{\lambda},$$

তাই রাও-ক্রামেরের সূত্রানুযায়ী পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকসমূহের ভেদমানের অধঃসীমা $\frac{\lambda}{n}$; ভেদমানের এই অধঃসীমা গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\bar{x}$ গ্রহণ করে। সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি লঘিষ্ঠ ভেদমানযুক্ত পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আবার $E(\bar{x}) = \lambda$

$$V(\bar{x}) = \frac{\lambda}{n} \to 0, \text{ যখন } n \to$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক।

দেখানো যেতে পারে $\bar{x}$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল। আরও দেখানো যেতে পারে যে এইজাতীয় সমুদয় সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে $\bar{x}$-এর ক্রমাসন্ন ভেদমানই সবচেয়ে ছোট। সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি সমঞ্জস ও দক্ষ প্রাক্কলক।

আবার $$\frac{d \log L}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= -n + \frac{n\bar{x}}{\lambda} = n\left(\frac{\bar{x}}{\lambda} - 1\right) = \phi(\bar{x}, \lambda)$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক।

তাই দেখা যাচ্ছে যে নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র জন্য পর্যাপ্ত এবং এটি λ-র লঘিষ্ঠ-ভেদমানযুক্ত, পক্ষপাতশূন্য, সমঞ্জস, ক্রমাসন্ন-নর্ম্যাল-নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

14.3.3 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরা যাক $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

(i) ধরা যাক σ^2 জানা আছে, কেবলমাত্র μ-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হবে।

$$L(\mu) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right]$$

সুতরাং $$\log L(\mu) = \text{ধ্রুবক} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

μ-এর গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হলে আশংসা সমীকরণ (likelihood equation) হচ্ছে

$$\frac{d \log L(\mu)}{d\mu}=0 \quad \text{অর্থাৎ } \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\text{অর্থাৎ } \sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0$$

$$\text{বা} \quad \mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

সুতরাং μ-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\mu}=\bar{x}$ অর্থাৎ নমুনাজ গড়।

এখন পূর্বের ন্যায় সন্তোষজনক প্রাক্কলকের অভিপ্রেত লক্ষণের দিক থেকে এই প্রাক্কলকটিকে বিচার করা যাক্।

$$E(\bar{x})=\mu$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

$$V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$$

এখন
$$\frac{d^2 \log L(\mu)}{d\mu^2}=-\frac{n}{\sigma^2}$$

সুতরাং
$$E\left[\frac{d^2 \log L(\mu)}{d\mu^2}\right]=-\frac{n}{\sigma^2}$$

তাই রাও-ক্রামেরের সূত্রানুযায়ী পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকসমূহের ভেদমানের অধঃসীমা $\frac{\sigma^2}{n}$; ভেদমানের এই অধঃসীমা $\bar{x}$ গ্রহণ করে। সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর একটি লঘিষ্ঠ ভেদমানযুক্ত পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আবার,
$$E(\bar{x})=\mu$$

$$V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}\to 0, \quad \text{যখন } n\to\infty$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক।

পূর্বেই দেখানো হয়েছে $\bar{x}$-এর বিভাজন নর্ম্যাল। আবার দেখানো যেতে পারে, এক্ষেত্রে যে সকল সমঞ্জস প্রাক্কলক ক্রমাসন্ন নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে তাদের কারও ভেদমান $\bar{x}$-এর ভেদমানের চেয়ে কম নয়। অতএব নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর একটি সমঞ্জস ও দক্ষ প্রাক্কলক।

পক্ষান্তরে, $\tilde{x}$ নমুনাজ মধ্যমমান হলে দেখানো যেতে পারে যে ক্রমাসন্নভাবে

$$E(\tilde{x}) \simeq \mu$$

$$V(\tilde{x}) \simeq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

স্থতরাং $\left.\begin{array}{l} E(\tilde{x}) \to \mu \\ V(\tilde{x}) \to 0 \end{array}\right\}$ যখন $n \to \infty$

নমুনাজ গড়ের ন্যায় নমুনাজ মধ্যমমানের ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল, কিন্তু এর ক্রমাসন্ন ভেদমান $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$। এটা নমুনাজ গড়ের ভেদমান $\frac{\sigma^2}{n}$-এর চেয়ে বড়। তাই নমুনাজ মধ্যমমান μ-এর অদক্ষ প্রাক্কলক এবং এর দক্ষতা $\frac{2}{\pi}$ বা প্রায় শতকরা 64.

আবার $$\frac{d \log L(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$= \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x} - \mu)$$

$$= \phi(\bar{x}, \mu)$$

স্থতরাং নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর একটি পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক।

তাই দেখা যাচ্ছে যে, নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর জন্য পর্যাপ্ত এবং এটি μ-এর লঘিষ্ঠ-ভেদমানযুক্ত, পক্ষপাতশূন্য, সমঞ্জস, নর্ম্যাল-নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

(ii) ধরা যাক μ জানা আছে, σ^2-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হবে।

$$L(\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

স্থতরাং $$\log L(\sigma^2) = \text{ধ্রুবক} - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

σ^2-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হলে আশংসা সমীকরণ

$$\frac{d \log L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = 0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

সুতরাং σ^2-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

$= S^2$ ধরলাম

এবং σ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} = S$

[$L(\sigma^2)$-এর পরিবর্তে $L(\sigma)$ থেকে আরম্ভ ক'রেও অনুরূপভাবে দেখানো যায় $\hat{\sigma} = S$, এটা গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলকের অপরিবর্তনীয়তা গুণের একটি পরিচায়ক ।]

এখন পূর্বের ন্যায় সন্তোষজনক প্রাক্কলকের অভিপ্রেত লক্ষণের দিক থেকে এই প্রাক্কলকটিকে বিচার করা যাক্।

$$E(S^2) = E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$$

$$= \sigma^2$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক

$$V(S^2) = V\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \{E(x_i - \mu)^4 - E^2(x_i - \mu)^2\}$$

$$= \frac{1}{n}(\mu_4 - \mu_2^2)$$

$$= \frac{2\sigma^4}{n},$$ কারণ নর্ম্যাল বিভাজনের ক্ষেত্রে $\mu_4 = 3\mu_2^2$

বিকল্প প্রমাণ ঃ

$\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = n \right.$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 চল

সুতরাং $E\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = n$ বা $E(S^2) = \sigma^2$

এবং $V\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = 2n$ বা $\left. V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \right]$

এখন $\frac{d^2 \log L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

সুতরাং $E\left[\frac{d^2 \log L(\sigma^2)}{d\sigma^2}\right] = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \cdot E\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{n}{\sigma^4}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^4}.$$

তাই রাও-ক্রামেরের সূত্রানুযায়ী পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকসমূহের ভেদমানের অধঃসীমা $\frac{2\sigma^4}{n}$; ভেদমানের এই অধঃসীমা S^2 গ্রহণ করে। অতএব নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণাঙ্ক σ^2-এর একটি লঘিষ্ঠ ভেদমানযুক্ত পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক।

আবার, $E(S^2) = \sigma^2$

$$V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \to 0, \text{ যখন } n \to \infty.$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক।

দেখানো যেতে পারে যে S^2-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল। আরও দেখানো যেতে পারে যে এইজাতীয় সমুদয় সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে S^2-এর ক্রমাসন্ন ভেদমানই সবচেয়ে ছোট। সুতরাং নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর একটি সমঞ্জস দক্ষ প্রাক্কলক।

আবার, $$\frac{d\log L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{nS^2}{\sigma^4}=\frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{S^2}{\sigma^2}-1\right)=\phi(S^2,\sigma^2)$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক।

তাই দেখা যাচ্ছে যে নমুনাঙ্ক S^2 পূর্ণকাঙ্ক σ^2-এর জন্য পর্যাপ্ত এবং এটি σ^2-এর লঘিষ্ঠ ভেদমানযুক্ত, পক্ষপাতশূন্য, সমঞ্জস, ক্রমাসন্ন-নর্ম্যাল নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

নমুনাঙ্ক S কিন্তু পূর্ণকাঙ্ক σ-র পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক নয়, কারণ

$$E(S)=\frac{\left|\frac{n+1}{2}\right.}{\left|\frac{n}{2}\right.}\sqrt{\frac{2}{n}}\;\sigma$$

সুতরাং σ-র পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হচ্ছে $$\frac{\left|\frac{n}{2}\right.}{\left|\frac{n+1}{2}\right.}\sqrt{\frac{n}{2}}\;S$$

নমুনাঙ্ক S অবশ্য পূর্ণকাঙ্ক σ-র জন্য পর্যাপ্ত এবং এটি σ-র সমঞ্জস, ক্রমাসন্ন-নর্ম্যাল-নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

(iii) তারপর ধরা যাক μ ও σ উভয়েরই গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হবে।

$$L(\mu,\sigma)=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\mu,\sigma)=\text{ধ্রুবক}\;-n\log\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

μ ও σ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক বের করতে হলে আশংসা সমীকরণদ্বয়

$$\frac{d \log L(\mu, \sigma)}{d\mu} = 0 \quad \text{এবং} \quad \frac{d \log L(\mu, \sigma)}{d\sigma} = 0$$

অর্থাৎ
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \\ \text{এবং} \quad &-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

এই সমীকরণদ্বয়ের সমাধান করলে

$$\mu = \bar{x}$$

ও
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = s$$

সুতরাং μ-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\mu} = \bar{x}$ বা নমুনাজ গড় এবং σ-র গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক $\hat{\sigma} = s =$ নমুনাজ প্রমাণ বিচ্যুতি।

(σ^2-এর গরিষ্ঠ-আশংসা প্রাক্কলক্ $s^2 =$ নমুনাজ ভেদমান।)

নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক, কিন্তু নমুনাঙ্ক s (বা s^2) পূর্ণকাঙ্ক σ (বা σ^2)-র পক্ষপাতশূন্য প্রাকক্লক নয়, কারণ

$$E(s) = \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right.}{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right.} \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma$$

এবং
$$E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

পূর্বের ন্যায় একইভাবে দেখানো যায় নমুনাঙ্ক $\bar{x}$ পূর্ণকাঙ্ক μ-এর সমঞ্জস, নর্ম্যাল-নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক এবং নমুনাঙ্ক s (বা s^2) পূর্ণকাঙ্ক σ (বা σ^2)-র সমঞ্জস, ক্রমাসন্ন-নর্ম্যাল-নিবেশিত, দক্ষ প্রাক্কলক।

আবার
$$L(\mu, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{(\bar{x}-\mu)^2 + s^2\}}$$
$$= f_1(\bar{x}, s, \mu, \sigma)\, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

যেখানে $f_1(\bar{x}, s, \mu, \sigma)=\frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\cdot\{(\bar{x}-\mu)^2+s^2\}}$

এবং $f_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$

সুতরাং $\bar{x}$ ও s-কে যৌথভাবে μ ও σ-র পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক বলা যেতে পারে।

14.4 অন্তর প্রাক্কলন (Interval estimation):

ধরা যাক θ একটি পূর্ণকাঙ্ক এবং T পূর্ণক থেকে সংগৃহীত সমসম্ভব নমুনালব্ধ একটি নমুনাঙ্ক। অনেক সময় এমন অপেক্ষক পাওয়া যায়, যথা $\phi(T, \theta)$, যার নমুনাজ বিভাজন θ-র উপর নির্ভরশীল নয়। তা হলে

$$P[\phi_{\overline{1-\alpha/2}} \leqslant \phi(T, \theta) \leqslant \phi_{\alpha/2}]=1-\alpha$$

যেখানে ব্যবহৃত $\phi_{\alpha/2}$ ও $\phi_{\overline{1-\alpha/2}}$-কে যথাক্রমে ϕ-এর বিভাজনের $100\frac{\alpha}{2}\%$ ও $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%$ বিন্দু বলা হয়। অনেক সময় এদের যথাক্রমে উর্ধ্ব ও অধঃ $100\ \frac{\alpha}{2}\%$ বিন্দুও বলা হয়। এদের অর্থ

$$P[\phi > \phi_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$$

এবং $$P[\phi > \phi_{\overline{1-\alpha/2}}] = 1-\frac{\alpha}{2}$$

বা $$P[\phi < \phi_{\overline{1-\alpha/2}}] = \frac{\alpha}{2}$$

উপরিলিখিত সম্ভাবনা সম্বন্ধ থেকে লেখা যায়

$$P[\theta_1(T) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(T)]=1-\alpha$$

যেখানে $\theta_1(T)$ ও $\theta_2(T)$ T-র দুইটি অপেক্ষক।

এর মানে এই: $\theta_1(T)$ ও $\theta_2(T)$ যে তাদের অন্তর্গত প্রসারের মধ্যে পূর্ণকাঙ্ক θ-কে অন্তর্ভুক্ত রাখবে তার সম্ভাবনা $1-\alpha$, অর্থাৎ যদি প্রচুর সংখ্যক সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয় এবং সেই নমুনার উপর নির্ভর ক'রে উপরিউক্ত প্রসার নির্ধারণ করা যায়, তবে শতকরা $100(1-\alpha)$টি ক্ষেত্রে ঐ প্রসার তার মধ্যে পূর্ণকাঙ্ক θ-কে রাখবে।

$\theta_1(T)$ ও $\theta_2(T)$-কে বলা হয় আস্থাসীমা, প্রথমটি অধঃ আস্থাসীমা ও দ্বিতীয়টি ঊর্ধ্ব আস্থাসীমা। $\theta_1(T)$ থেকে আরম্ভ ক'রে $\theta_2(T)$ পর্যন্ত প্রসারকে বলা হয় আস্থা অন্তর। $(1-\alpha)$-কে বলা হয় আস্থা অঙ্ক। এই আস্থা অঙ্ক 1-এর নিকটবর্তী হওয়াই বাঞ্ছনীয়। একে শতকরা হিসাবে লেখা হয়, যথা $100(1-\alpha)\%$। সাধারণতঃ এটি 0·95 বা 0·99 অর্থাৎ 95% বা 99% হয়।

সাধারণক্ষেত্রে উপরিলিখিত $\phi(T, \theta)$-র মতো অপেক্ষক না পাওয়া গেলে নিম্নে প্রদর্শিত পন্থায় অগ্রসর হওয়া যায়।

T-র বিভাজন থেকে $A(\theta)$ ও $B(\theta)$ নিরূপণ করা যায় যাতে

$$P[A(\theta) < T < B(\theta)] = 1-\alpha$$

এর থেকেই বিবর্তভাবে $a(T)$ ও $b(T)$ নিরূপণ করা যাবে যাতে

$$P[a(T) < \theta < a(T)] = 1-\alpha$$

হয়। নমুনা থেকে T-র মান বের করার পর তার উপর নির্ভর ক'রে আমরা θ-র দুইটি মান বের করতে চেষ্টা করি যেন T-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান T-বিভাজনের যথাক্রমে $100\frac{\alpha}{2}\%$ বিন্দু ও $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%$ বিন্দুর সমান হয়। θ-র ঐ মান দুইটিই তার আস্থাসীমা।

14.5 প্রকল্প বিচার (Testing of Hypothesis) :

প্রকল্প দুই ধরনের হতে পারে, যথা সরল (simple) ও যৌগিক (composite)। যে প্রকল্পে সমুদয় অজানা পূর্ণকাঙ্ক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ মান নির্দেশিত থাকে তাকে বলে সরল প্রকল্প, আর যে প্রকল্পে সমুদয় পূর্ণকাঙ্ক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ মান নির্দেশিত থাকে না তাকে বলে যৌগিক প্রকল্প। যে কয়টি পূর্ণকাঙ্কের মান নির্দেশিত থাকে না সেই কয়টির সংখ্যাকে বলে ঐ যৌগিক প্রকল্পের স্বাতন্ত্র্যমাত্রা।

14.5.1 নেম্যান ও পিয়ারসনের প্রকল্প বিচার (Neyman and Pearson's theory of testing of hypothesis) :

যুক্তিতর্কের উপর নির্ভর ক'রে নেম্যান ও পিয়ারসন প্রকল্প বিচারের সুন্দর বিজ্ঞানসম্মত আলোচনা করেছেন।

ধরা যাক পূর্ণকে একমাত্র পূর্ণকাঙ্ক θ সম্বন্ধে প্রকল্প দেওয়া আছে

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

এই প্রকল্পকে বলা হয় মুখ্য প্রকল্প (null hypothesis)। নমুনার উপর নির্ভর

ক'রে আমাদের বিচার ক'রে দেখতে হবে যে এই প্রকল্প গ্রহণযোগ্য কি না। এই প্রকল্প বিচার করতে গেলেই বিকল্প কোন প্রকল্পের কথা স্বভাবতঃই মনে জাগে। ধরা যাক সেরূপ কোন প্রকল্প

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

এই প্রকল্পকে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প (alternative hypothesis)।

কোন সমসম্ভব নমুনালব্ধ পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণ সমুদয় $x_1, x_2, \ldots, x_n$-কে n মাত্রিক কোন দেশে একটি বিন্দু E দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এই বিন্দুকে বলা হয় নমুনা বিন্দু (sample point)। এরূপ বিভিন্ন নমুনালব্ধ E বিন্দু যে দেশ W-র সৃষ্টি করে তাকে বলে নমুনা দেশ (sample space)। ধরলাম w হচ্ছে এই দেশের একটি অংশ। ধরলাম প্রকল্প বিচারে নিয়ম করা গেল যে যদি নমুনালব্ধ বিন্দু E এই w-র অভ্যন্তরে পড়ে তবে মুখ্য প্রকল্প H_0-কে বর্জন করতে হবে, নতুবা H_0-কে গ্রহণ করতে হবে। সেকারণ এই w-কে বলা হয় বর্জনাঞ্চল (critical region or region of rejection)। w-র বাইরে দেশের অংশ $(W-w)$-কে বলা হয় গ্রহণাঞ্চল (region of acceptance)। এই অঞ্চলের পরিসীমা গ্রহণাঞ্চলের মধ্যে ধরা হয়।

নমুনার উপর নির্ভর ক'রে উপরিলিখিত উপায়ে প্রকল্প বিচারে দুই ধরনের ভুল হতে পারে, যথা মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্য হলেও E বর্জনাঞ্চলে পড়ার ফলে এই মুখ্য প্রকল্প H_0 বর্জিত হতে পারে এবং মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্য না হয়ে কোন বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 আসলে সত্য হলেও, E গ্রহণাঞ্চলে পড়ার ফলে, মুখ্য প্রকল্প H_0 গৃহীত হতে পারে। এই দুই ধরনের ভুলকে যথাক্রমে বলা হয় প্রথম প্রকারের ভ্রান্তি (first kind of error) ও দ্বিতীয় প্রকারের ভ্রান্তি (second kind of error)। তা হলে প্রথম প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনা হচ্ছে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী E বিন্দুর বর্জনাঞ্চল w-তে পড়বার সম্ভাবনা

$$= P[E \varepsilon w / \theta_0]$$

এই সম্ভাবনাকে সাধারণতঃ α দ্বারা নির্দেশ করা হয়। আর বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 অনুসারে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা হচ্ছে বৈকল্পিক প্রকল্পানুযায়ী E বিন্দুর গ্রহণাঞ্চলে পড়বার সম্ভাবনা

$$= P[E \varepsilon \overline{W-w} | \theta_1]$$

$$= 1 - P[E \varepsilon w | \theta_1]$$

এই সম্ভাবনাকে সাধারণতঃ β দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

এখন $P[E \varepsilon w | \theta_1]$ হচ্ছে মুখ্য প্রকল্পের বর্জিত হবার সম্ভাবনা, যখন এই মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্য না হয়ে বরং বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 সত্য। তাই $P[E \varepsilon w | \theta_1]$-কে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 সংশ্লিষ্ট বিচারের শক্তি (power)। লেখ কাগজে x অক্ষরেখায় θ-র বিভিন্ন মান ও y অক্ষরেখায় সংশ্লিষ্ট শক্তি নির্দেশকের যে লেখ গঠন করা যায় তাকে বলা হয় বিচারের শক্তি রেখা (power curve)।

যদি উভয় প্রকার ভ্রান্তিকেই একসঙ্গে খুব ছোট করা যেত তবে ভাল হ'ত। কিন্তু নমুনার আয়তনের নির্দিষ্ট মাপে (অর্থাৎ n নির্দিষ্ট বলে) এটা সম্ভব নয় ; একটি ভ্রান্তির সম্ভাবনা যত কমবে অপর ভ্রান্তির সম্ভাবনা ততই বাড়বে। সেক্ষেত্রে আমরা প্রথম প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনাকে নির্দিষ্ট কোন মাপে রেখে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনাকে যথাসাধ্য ছোট করতে চেষ্টা করি বা প্রকল্প বিচারের শক্তিকে যথাসাধ্য বড় করতে চেষ্টা করি। সরল প্রকল্পের ক্ষেত্রে প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনাকে, অর্থাৎ α-কে সংশয়মাত্রা (level of significance) বলে। সাধারণতঃ সংশয়মাত্রা শতকরা হিসাবে প্রকাশিত হয়, যথা $100\alpha\%$.

একই সংশয়মাত্রাবিশিষ্ট বিভিন্ন বর্জনাঞ্চলকে বলা হয় সদৃশ (equivalent) বর্জনাঞ্চল। বিভিন্ন সদৃশ বর্জনাঞ্চলের মধ্যে নির্দিষ্টভাবে বর্জনাঞ্চল w যদি এমন হয় যে

$$P[E \varepsilon w | \theta_0) = \alpha$$

এবং অপর সমস্ত বর্জনাঞ্চল w_j-র জন্য

$$P(E \varepsilon w | \theta_1) > P(E \varepsilon w_j | \theta_1)$$

যেখানে $\quad P(E \varepsilon w_j | \theta_0) = \alpha, \; j = 1, 2, 3, \cdots \qquad (14.5.1a)$

তাহলে w-কে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 অনুসারে α আয়তনের সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বর্জনাঞ্চল এবং এই w-র উপর ভিত্তি ক'রে যে বিচার তাকে বলা হয় α আয়তনের সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার (most powerful test of size α)।

যে w-র ক্ষেত্রে উপরিলিখিত সম্বন্ধ $(14.5.1a)$ সকল বৈকল্পিক প্রকল্প H-এর জন্য সত্য হয় সেই w-কে বলা হয় 'সাধিক সর্বোচ্চ' শক্তিসম্পন্ন α-আয়তনের বর্জনাঞ্চল ও অনুরূপ বিচারকে বলা হয় সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন α-আয়তনের বিচার (uniformly most powerful test)।

অধিকাংশক্ষেত্রেই এমন সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার পাওয়া সম্ভব

হয় না। তবে যদি বৈকল্পিক প্রকল্পকে দুইভাগে পৃথক করা যায়, যথা (i) $H: \theta > \theta_0$ এবং (ii) $H: \theta < \theta_0$ তবে উভয়ক্ষেত্রেই সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার পাওয়া যায়, অর্থাৎ উভয়পাক্ষিক (two-sided) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \theta \neq \theta_0$ এর জন্য যদিও সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার পাওয়া যায় না তবুও এক-পাক্ষিক (one-sided) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \theta > \theta_0$ বা $H: \theta < \theta_0$-এর ক্ষেত্রে ঐরূপ সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার পাওয়া যায়। এ ধরনের বিচারকে বলা হয় এক-পাক্ষিক বিচার (one-sided test)।

এই কারণে প্রকল্প বিচারের অপর একটি দিক আলোচনা করা যাক। এই বাঞ্ছিত ধর্মকে বলা হয় পক্ষপাতশূন্যতা (unbiassedness) (এটা কিন্তু প্রাক্‌কলকের পক্ষপাতশূন্যতার থেকে আলাদা)। কোন বর্জনাঞ্চল যদি এমন হয় যে

$$P(E\varepsilon w | \theta_1) \geqslant P(E\varepsilon w | \theta_0)$$

অর্থাৎ বিচারের শক্তি যদি সংশয়মাত্রার চেয়ে বড় বা তার সমান হয় তবে w-কে বলা হয় পক্ষপাতশূন্য বর্জনাঞ্চল। (এক্ষেত্রে উভয় প্রকার ভ্রান্তির যোগফল অর্থাৎ $\alpha + \beta \leqslant 1$)।

বিচারের এই দিকটা সত্যই অনুমোদনযোগ্য, কারণ এক্ষেত্রে মুখ্যপ্রকল্প ঠিক না হলে তার বর্জনের সম্ভাবনা মুখ্য প্রকল্প ঠিক হলে তার বর্জনের সম্ভাবনার চেয়ে বেশী। এমতাবস্থায় বিভিন্ন পক্ষপাতশূন্য বর্জনাঞ্চলের মধ্যে w যদি এমন হয় যে

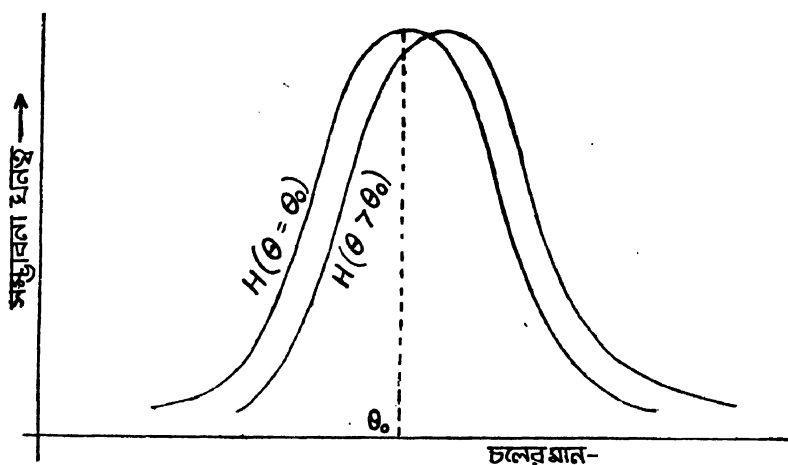
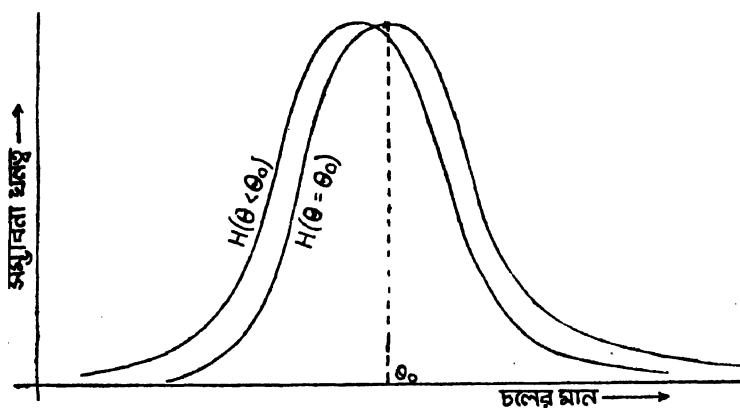
$$\left.\begin{array}{ll} & P(E\varepsilon w | \theta_0) = \alpha \\ & P(E\varepsilon w | \theta_1) \geqslant \alpha \\ & P(E\varepsilon w | \theta_1) > P(E\varepsilon w_j | \theta_1) \\ \text{যেখানে} & P(E\varepsilon w_j | \theta_0) = \alpha \\ \text{ও} & P(E\varepsilon w_j | \theta_1) \geqslant \alpha \end{array}\right\} \quad (14.5.1b)$$

তা হলে w-কে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 অনুসারে সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য (most powerful unbiassed) α-আয়তনের বর্জনাঞ্চল, আর এই w-র উপর ভিত্তি ক'রে যে বিচার, তাকে বলা হয় সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য α-আয়তনের বিচার।

যে w-র ক্ষেত্রে উপরিলিখিত সম্বন্ধ (14.5.1b) সকল বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য সত্য হয় সেই w-কে বলা হয় সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য (uniformly most powerful unbiassed) α-আয়তনের বর্জনাঞ্চল এবং অনুরূপ বিচারকে বলা হয় সাধিক সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য α-আয়তনের বিচার।

উভয়পাক্ষিক বিকল্প $H : \theta \neq \theta_0$-এর জন্যও সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য α-আয়তনের বিচার পাওয়া যায়। এ ধরনের বিচারকে পক্ষপাতশূন্য উভয়-পাক্ষিক (two-sided) বিচার বলে।

14.5.2 স্বজ্ঞাভিত্তিক প্রকল্প বিচার (Intuitive approach to testing of hypothesis) :

যুক্তিতর্ক বাদ দিয়ে স্বতঃস্ফূর্ত জ্ঞান থেকেও প্রকল্প বিচার করা চলে। সেটিই নীচে আলোচনা করা হচ্ছে।

চিত্র 14.1

চিত্র 14.2

ধরা যাক্ পূর্ণকাঙ্ক θ এবং কোন সমসম্ভব নমুনালব্ধ অনুরূপ নমুনাঙ্ক T, আরও ধরা যাক $\phi(T, \theta)$ ঐ পূর্ণকাঙ্ক θ ও নমুনাঙ্ক T-এর একটি অপেক্ষক।

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী $\phi = \phi^\circ = \phi(T, \theta_0)$

মনে করা যাক্ ϕ°-এর বিভাজন θ_0-এর মানের বৃদ্ধিতে ডানদিকে স'রে যায় অর্থাৎ ϕ°-এর বিভাজন যেন চিত্র 14·1 ও 14·2 অনুযায়ী হয়।

ϕ°-এর বিভাজন থেকে আমরা তার এমন কয়েকটি মান

$$\phi^\circ_{\alpha},\ \phi^\circ_{\overline{1-\alpha}},\ \phi^\circ_{\alpha/2},\ \phi^\circ_{\overline{1-\alpha/2}}$$

বের করতে পারি যেন

$$P[\phi^\circ > \phi^\circ_{\alpha}] = \alpha$$

$$P[\phi^\circ < \phi^\circ_{\overline{1-\alpha}}] = \alpha$$

$$P[\phi^\circ > \phi^\circ_{\alpha/2}] = \alpha/2$$

এবং $$P[\phi^\circ < \phi^\circ_{\overline{1-\alpha/2}}] = \alpha/2$$

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta \neq \theta_0$

α যদি বেশ ছোট হয় (অধিকাংশ ক্ষেত্রেই $\alpha = {}$·05 বা ·01) তবে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী ϕ°-এর পক্ষে $\phi^\circ_{\alpha/2}$-এর চেয়ে বেশী বা $\phi^\circ_{\overline{1-\alpha/2}}$-এর চেয়ে কম হবার সম্ভাবনা খুবই কম। সুতরাং সেক্ষেত্রে সত্যই যদি ϕ°-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $\phi^\circ_{\alpha/2}$-এর চেয়ে বেশী হয় বা $\phi^\circ_{\overline{1-\alpha/2}}$-এর চেয়ে কম হয় তবে মুখ্য প্রকল্পকেই সন্দেহ করবার অবকাশ থাকে এবং তাই সেক্ষেত্রে আমরা ঐ মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করি।

যেহেতু $P[\phi^\circ > \phi^\circ_{\alpha/2}$ বা $\phi^\circ < \phi^\circ_{\overline{1-\alpha/2}}] = \alpha$

এই প্রকল্প বিচারের সংশয়মাত্রা α.

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta > \theta_0$

পূর্বের মতো α যদি বেশ ছোট হয় তবে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী ϕ°-এর ϕ°_{α}-এর চেয়ে বেশী হবার সম্ভাবনা খুবই কম। সুতরাং সেক্ষেত্রে সত্যই যদি ϕ°-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান ϕ°_{α}-এর চেয়ে বেশী হয় তবে মুখ্য প্রকল্পকে সন্দেহ ক'রে বৈকল্পিক প্রকল্পকে গ্রহণ করবার অবকাশ থাকে এবং তাই সেক্ষেত্রে আমরা ঐ মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করি।

যেহেতু $P[\phi^\circ > \phi^\circ_{\alpha}] = \alpha$

এই প্রকল্প বিচারের সংশয়মাত্রা α

(এক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী ϕ°-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $\phi^{\circ}_{1-\alpha}$-এর চেয়ে কম হবার সম্ভাবনাও খুব কম কিন্তু সেই সম্ভাবনা $\theta > \theta_0$ হলে আরও কম। যেহেতু আমাদিগকে $\theta = \theta_0$ বা $\theta > \theta_0$-এর মধ্যে একটিকে মনোনয়ন করতে হবে, সেক্ষেত্রে $\theta = \theta^0$-ই মনোনীত হবে [চিত্র 14.1 দ্রষ্টব্য]।)

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta < \theta_0$

একইরূপ আলোচনার মাধ্যমে এক্ষেত্রে যদি ϕ°-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $\phi^{\circ}_{1-\alpha}$-এর চেয়ে কম হয় তবেই মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করা হবে (চিত্র 14.2 দ্রষ্টব্য)।

মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য না হলে নমুনাঙ্ক ϕ°-কে বলা হয় সংশয়াত্মক বা তাৎপর্যপূর্ণ। সাধারণতঃ $\alpha = \cdot 05$ হলেই এরূপ বলা হয়। α যদি ˙01 হয় তবে এরূপ স্থলে ϕ°-কে বলা হয় অত্যন্ত সংশয়াত্মক বা অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ।

5% সংশয়মাত্রায় সংশয়াত্মক নমুনাঙ্কের মাথায় একটি তারকাচিহ্ন (*) দেওয়া হয়। 1% সংশয়মাত্রায় সংশয়াত্মক নমুনাঙ্কের মাথায় দুইটি তারকাচিহ্ন (**) দেওয়া হয়। 5% সংশয়মাত্রায় নমুনাঙ্ক সংশয়াত্মক না হলে এরূপ কোন তারকাচিহ্ন দেওয়া হয় না।

বৈকল্পিক প্রকল্প দেখেই বোঝা যাবে যে বিচার উভয়পাক্ষিক হবে, না, একপাক্ষিক হবে। উভয়পাক্ষিক প্রকল্প $H : \theta \neq \theta_0$-এর ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক নমুনাঙ্কের বিভাজনের উভয়পুচ্ছ বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে, আর একপাক্ষিক প্রকল্প $H : \theta > \theta_0$ (বা $\theta < \theta_0$)-এর ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক নমুনাঙ্কের বিভাজনের দক্ষিণ (বা বাম পুচ্ছ) বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে।

এভাবে সাধারণ জ্ঞান থেকে প্রকল্প বিচারের যে নিয়ম পাওয়া গেল তার সঙ্গে নেম্যান পিয়ারসনের বিজ্ঞানসম্মত বিচারপদ্ধতির অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কোন পার্থক্য নেই।

অবিচ্ছিন্ন চলের ক্ষেত্রে ϕ°_{α} ইত্যাদি বের করা সম্ভব নাও হতে পারে, সেক্ষেত্রে P [$\phi^{\circ} \geqslant$ নমুনালব্ধ ϕ°-এর অবেক্ষিত মান] বা (বৈকল্পিক প্রকল্পানুসারে) অনুরূপ অন্য সম্ভাবনা বের করতে হবে। এই সম্ভাবনা যদি α-র চেয়ে কম হয়, তবেই মুখ্য প্রকল্প বর্জনীয়, অন্যথায় নয়।

14.6 কয়েকটি বিশেষক্ষেত্রে অন্তর প্রাক্কলন ও প্রকল্প বিচার :

স্বজ্ঞাভিত্তিক প্রকল্প বিচার পদ্ধতি অবলম্বনে নীচে কিছু প্রকল্প বিচার করা হচ্ছে। অজানা পূর্ণকাঙ্কের অন্তর প্রাক্কলন এবং পূর্ণকাঙ্ক সম্বন্ধে কোন প্রকল্প বিচার অনুমানতত্ত্বের দিক থেকে সম্পূর্ণ পৃথক হলেও ঐ অন্তর প্রাক্কলন নির্ণয় এবং প্রকল্প বিচার পদ্ধতির মধ্যে বেশ একটি সংযোগ রয়েছে। তাই বিভিন্ন পরিস্থিতিতে উভয় প্রশ্নের সমাধান একসাথেই আলোচিত হচ্ছে।

14.6.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরা যাক কোন পূর্ণকে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের অংশের মান P এবং ঐ পূর্ণক থেকে n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ, অর্থাৎ বেরনুলির n-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ পরীক্ষা করা হয়েছে, যেখানে প্রতি পরীক্ষায় কৃতকার্যতার সম্ভাবনা P

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে দ্বিপদ পূর্ণকাঙ্ক P-র জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : P = P_0$$

বিচার করতে হবে।

এখানে নমুনাঙ্ক x = নমুনাতে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের সংখ্যা। মুখ্য প্রকল্পানুসারে এ n ও P_0 পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে। ধরা যাক কোন নির্দিষ্ট নমুনাতে এর মান হচ্ছে r.

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : P > P_0$ হলে নীচের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে।

$$P[x \geqslant r] = \sum_{x=r}^{n} \binom{n}{x} (1-P_0)^{n-x} P_0^{x}$$

এই সম্ভাবনা যদি সংশয়মাত্রা α-র চেয়ে ছোট হয়, তবে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : P < P_0$ হলে নীচের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে।

$$P[x \leqslant r] = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} (1-P_0)^{n-x} P_0^{x}$$

এই সম্ভাবনা যদি সংশয়মাত্রা α-র চেয়ে ছোট হয় তবে মুখ্যপ্রকল্প বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: P \neq P_0$ হলে সাধারণ আলোচনা এখানে করা হ'ল না। তবে $P_0 = \cdot 5$ হলে নীচের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে।

$$P[x < nP_0 - |r - nP_0| \text{ বা } x > nP_0 + |r - nP_0|]$$
$$= P[x < nP_0 - d] + P[x > nP_0 + d]$$

যেখানে $d = |r - nP_0|$.

$$= \sum_{x \leq nP_0 - d} \binom{n}{x} (1 - P_0)^{n-x} P_0^x + \sum_{x \geq nP_0 + d} \binom{n}{x} (1 - P_0)^{n-x} P_0^x$$

$$= \frac{1}{2^n} \Big[\sum_{x \leq \frac{n}{2} - d} \binom{n}{x} + \sum_{x \geq \frac{n}{2} + d} \binom{n}{x} \Big]$$

এই সম্ভাবনা যদি সংশয়মাত্রা α-র চেয়ে ছোট হয় তবে মুখ্যপ্রকল্প বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে।

দ্বিপদ-বিভাজন বিষয়ক নানাবিধ সম্ভাবনা পিয়ারসন ও হার্টলের (Pearson and Hartley's) বায়োমেট্রিকা সারণী, প্রথম খণ্ডে (Biometrika Tables, Volume 1) পাওয়া যাবে।

দ্বিপদ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত অন্তর প্রাক্কলন এখানে আলোচনা করা হ'ল না, কারণ সংশ্লিষ্ট আস্থা অন্তর নিশ্চিতভাবে নিরূপণ পদ্ধতির আলোচনা এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে। পরের পরিচ্ছেদে এটা আসন্নভাবে নিরূপণ করা হবে।

দুইটি দ্বিপদ পূর্ণকাঙ্কের তুলনা করাও এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে। এটাও পরের পরিচ্ছেদে আসন্নভাবে করা হবে।

14.6.2 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরা যাক $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ পূর্ণকাঙ্ক λ সম্বলিত পোয়াসঁ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পোয়াসঁ পূর্ণকাঙ্ক λ-র জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$

বিচার করতে হবে।

এখানে নমুনাঙ্ক $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$। মুখ্য প্রকল্পানুসারে এ $n\lambda_0$ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত পোয়াসঁ বিভাজন অনুসরণ করে। ধরা যাক কোন নির্দিষ্ট নমুনাতে এর মান হচ্ছে r।

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \lambda > \lambda_0$ হলে নীচের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে,

$$P[x \geqslant r] = \sum_{x=r}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^x}{x\,!}$$

এই সম্ভাবনা যদি সংশয়মাত্রা α-র চেয়ে ছোট হয় তবে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \lambda < \lambda_0$ হলে নীচের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে,

$$P[x \leqslant r] = \sum_{x=0}^{r} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^x}{x\,!}$$

এই সম্ভাবনা যদি সংশয়মাত্রা α-র চেয়ে ছোট হয় তবে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \lambda \neq \lambda_0$ হলে সে আলোচনা এখানে করা হ'ল না।

পোয়াসঁ পূর্ণকাঙ্ক সম্বলিত অন্তর প্রাক্কলন এখানে আলোচনা করা হ'ল না, কারণ সংশ্লিষ্ট আস্থা অন্তর নিশ্চিতভাবে নিরূপণ পদ্ধতির আলোচনা এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে। পরের পরিচ্ছেদে এটা আসন্নভাবে নিরূপণ করা হবে।

দুইটি পোয়াসঁ পূর্ণকাঙ্কের তুলনা করাও এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে। এটাও পরের পরিচ্ছেদে আসন্নভাবে করা হবে।

পোয়াসঁ বিভাজন বিষয়ক নানাবিধ সম্ভাবনা পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণি, প্রথম খণ্ডে পাওয়া যাবে।

14.6.3 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট নর্ম্যাল বিভাজন থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

(A) ধরলাম σ জানা আছে, μ জানা নেই।

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক μ-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে প্রমাণ নর্ম্যাল চল $\xi = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ যেখানে $\bar{x} = \sum\limits_{i=1} x_i/n$

[এ $N(0, 1)$ বিভাজন অনুসরণ করে।]

আমরা দেখতে পাই

$$P\left[\xi_{\overline{1-a/2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \xi_{a/2}\right] = 1 - a$$

অর্থাৎ, $P\left[-\xi_{a/2} < \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \xi_{a/2}\right] = 1 - a$ (কারণ ξ-এর বিভাজন $\xi = 0$-এর উভয় পাশে প্রতিসম)

অর্থাৎ, $P\left[-\bar{x} - \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu \leqslant -\bar{x} + \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - a$

অর্থাৎ, $P\left[\bar{x} - \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - a$

সুতরাং, আস্থা অঙ্ক $100(1-a)\%$ হলে μ-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে $\bar{x} - \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ও $\bar{x} + \xi_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

আবার নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক μ-এর জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক $\xi = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

[এর বিভাজন $N(0, 1)$]

সুতরাং, সংশয়মাত্রা 100 $a\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu > \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \xi_a$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu < \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< \xi_{1-\alpha}$ অর্থাৎ $< -\xi_\alpha$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu \neq \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \xi_{\alpha/2}$ হয় বা $< \xi_{1-\alpha/2}$ হয়, অর্থাৎ $|$ ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $| > \xi_{\alpha/2}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

প্রমাণ নর্ম্যাল চলের এই সমস্ত শতকরা বিন্দু পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণি প্রথম ভাগে পাওয়া যাবে।

(B) μ জানা আছে, σ জানা নেই।

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক σ-র আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে, $\chi^2_n = \frac{nS^2}{\sigma^2}$

যেখানে, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

এবং $\chi^2_n = n$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2

[এ n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 অনুসরণ করে।] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2, n} \leqslant \frac{nS^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{\alpha/2, n} \right] = 1 - \alpha$$

যেখানে, $\chi^2_{\alpha/2, n}$-এর অর্থ n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজনের ঊর্ধ্ব $100_{\alpha/2}\%$ বিন্দু

অর্থাৎ, $P[\chi^2_{1-\alpha/2, n}/nS^2 \leqslant 1/\sigma^2 \leqslant \chi^2_{\alpha/2, n}/nS^2] = 1 - \alpha$

অর্থাৎ, $P[nS^2/\chi^2_{\alpha/2, n} \leqslant \sigma^2 \leqslant nS^2/\chi^2_{1-\alpha/2, n}] = 1 - \alpha$

অর্থাৎ, $P[\sqrt{nS^2/\chi^2_{\alpha/2, n}} \leqslant \sigma \leqslant \sqrt{nS^2/\chi^2_{1-\alpha/2, n}}] = 1 - \alpha$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে σ-র অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে $\sqrt{nS^2/\chi^2_{\alpha/2, n}}$ ও $\sqrt{nS^2/\chi^2_{1-\alpha/2, n}}$

(প্রসঙ্গক্রমে দেখা গেল σ^2-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে $nS^2/\chi^2_{\alpha/2, n}$ ও $nS^2/\chi^2_{1-\alpha/2, n}$)

আবার নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক σ-র জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$\text{নমুনাঙ্ক } \chi_n^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

[এর বিভাজন n স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 ।]

সুতরাং সংশয়মাত্রা 100 α% হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma > \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি χ_n^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2_{\alpha, n}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma < \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি χ_n^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< \chi^2_{\overline{1-\alpha}, n}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma \neq \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি χ_n^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2_{\alpha/2, n}$ হয় বা $< \chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, n}$ হয়।

χ^2-বিভাজনের এই সমস্ত শতকরা বিন্দু পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণী প্রথম ভাগে পাওয়া যাবে।

(C) ধরলাম μ ও σ কোনটাই জানা নেই।

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক μ-এর আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

$$\text{এখানে} \quad t_{\overline{n-1}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s'/\sqrt{n}}$$

$$\text{যেখানে} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$$

$$s'^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \Big/ (n-1)$$

এবং $t_{\overline{n-1}} = \overline{n-1}$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t

[এ $\overline{n-1}$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন অনুসরণ করে।] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[t_{1-\alpha/2, \overline{n-1}} < \frac{\bar{x}-\mu}{s'/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \right] = 1-\alpha.$$

অর্থাৎ $$P\left[-t_{\alpha/2, \overline{n-1}} < \frac{\bar{x}-\mu}{s'/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \right] = 1-\alpha$$

(কারণ t-র বিভাজন $t=0$-এর উভয় পাশে প্রতিসম)

অর্থাৎ $$P\left[\bar{x} - t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \frac{s'}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right] = 1-\alpha$$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে μ-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে $\bar{x} - t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \frac{s'}{\sqrt{n}}$ ও $\bar{x} + t_{\alpha/2, \overline{n-1}} \frac{s'}{\sqrt{n}}$.

আবার নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক μ-এর জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক $t_{\overline{n-1}} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s'\sqrt{n}}$

[এর বিভাজন $n-1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন।]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu > \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $t_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> t_{\alpha, \overline{n-1}}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu < \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $t_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< t_{1-\alpha, \overline{n-1}}$ হয়, অর্থাৎ $< -t_{\alpha, \overline{n-1}}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu \neq \mu_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $t_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> t_{\alpha/2, \overline{n-1}}$ হয় বা $< t_{1-\alpha/2, \overline{n-1}}$ হয়, অর্থাৎ যদি $|$ $t_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ আবেক্ষিত মান $| > t_{\alpha/2, \overline{n-1}}$ হয়, নচেৎ একে গ্রহণ করা হবে।

t-বিভাজনের এই সমস্ত শতকরা বিন্দু পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণী প্রথমভাগে পাওয়া যাবে

σ-র আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিতে হবে

$$\chi^2_{\overline{n-1}} = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma^2}$$

[এ $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করে।] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[\chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, \overline{n-1}} \leqslant \frac{(n-1)s'^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}}\right] = 1-\alpha$$

অর্থাৎ, $P[(n-1)s'^2/\chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant (n-1)s'^2/\chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, \overline{n-1}}]$
$= 1-\alpha$

অর্থাৎ, $P[\sqrt{(n-1)s'^2/\chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}}} \leqslant \sigma \leqslant \sqrt{(n-1)s'^2/\chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, \overline{n-1}}}]$
$= 1-\alpha$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে σ-র অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে $\sqrt{(n-1)s'^2/\chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}}}$ ও $\sqrt{(n-1)s'^2/\chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, \overline{n-1}}}$

(এখানেও প্রসঙ্গক্রমে দেখা গেল σ^2-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$(n-1)s'^2/\chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}} \text{ ও } (n-1)s'^2/\chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, n-1})$$

আবার σ-র সম্বন্ধে মুখ্য প্রকল্প

$$H : \sigma = \sigma_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি যে,

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$\text{নমুনাঙ্ক } \chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2}$$

[এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma > \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $\chi^2_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2_{\alpha, \overline{n-1}}$ হয়।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma < \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $\chi^2_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< \chi^2_{\overline{1-\alpha}, \overline{n-1}}$ হয়।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma \neq \sigma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি $\chi^2_{\overline{n-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2_{\alpha/2, \overline{n-1}}$ হয় বা $< \chi^2_{\overline{1-\alpha/2}, \overline{n-1}}$ হয়।

14.6.4 দুইটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1})$ গড় μ_1 ও ভেদমান σ_1^2 বিশিষ্ট নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি n_1 আয়তনের সমসম্ভব নমুনা এবং $(x_{21}, x_{22}, x_{2n_2})$ গড় μ_2 ও ভেদমান σ_2^2 বিশিষ্ট অপর একটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n_2 আয়তনের সমসম্ভব নমুনা। (উভয় ক্ষেত্রেই অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ)।

(A) ধরলাম σ_1 ও σ_2 জানা আছে, μ_1 ও μ_2 জানা নেই।

$(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে প্রমাণ নর্ম্যাল চল $\xi = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

$$\left(\text{যেখানে } \bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}/n_1 \text{ এবং } \bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}/n_2 \right)$$

[এ $N(0, 1)$ বিভাজন অনুসরণ করে।] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[-\xi_{\alpha/2} \leqslant \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \leqslant \xi_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

অর্থাৎ, $P\,[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\,\xi_{\alpha/2} \leqslant (\mu_1 - \mu_2) \leqslant (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$
$+ \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\,\xi_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে $(\mu_1 - \mu_2)$-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\,\xi_{\alpha/2}$$

এবং $$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\,\xi_{\alpha/2}$$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$H : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$　　(অধিকাংশ ক্ষেত্রেই $\delta_0 = 0$)

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক　$\xi = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

[এর বিভাজন $N(0, 1)$]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\,\alpha\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \xi_\alpha$ হয়।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< \xi_{1-\alpha}$ হয়, অর্থাৎ $< -\xi_\alpha$ হয়।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যদি | ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $| > \xi_{\alpha/2}$ হয়।

(B) ধরলাম μ_1 ও μ_2 জানা আছে, σ_1 ও σ_2 জানা নেই।

σ_1/σ_2-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে $$F_{n_1, n_2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$$

(যেখানে $$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2/n_1$$

এবং $$S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2/n_2$$

এবং $F_{n_1, n_2} = n_1, n_2$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F)

[এ n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন অনুসরণ করে] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[F_{1-\alpha/2, n_1, n_2} \leq \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \leq F_{\alpha/2, n_1, n_2} \right] = 1 - \alpha$$

অর্থাৎ $$P\left[\frac{F_{1-\alpha/2, n_1, n_2}}{S_1^2/S_2^2} \leq \frac{1}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \leq \frac{F_{\alpha/2, n_1, n_2}}{S_1^2/S_2^2} \right] = 1 - \alpha$$

অর্থাৎ $$P\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2, n_1, n_2}} \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2, n_1, n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

অর্থাৎ $$P\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2, n_1, n_2}} \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{\alpha/2, n_2, n_1} \right] = 1 - \alpha$$

অর্থাৎ $$P\left[\frac{S_1/S_2}{\sqrt{F_{\alpha/2, n_1, n_2}}} \leq \sigma_1/\sigma_2 \leq \frac{S_1}{S_2} \sqrt{F_{\alpha/2, n_2, n_1}} \right] = 1 - \alpha$$

(কারণ n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজনের অধঃ $100\,\alpha/2\%$ বিন্দু এবং n_2 ও n_1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজনের ঊর্ধ্ব $100\,\alpha/2\%$ বিন্দু পরস্পরের অন্যোন্যক, নীচের টীকা দ্রষ্টব্য)

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে σ_1/σ_2-এর অধঃ ও উর্ধ্ব আস্থা-সীমাদ্বয় যথাক্রমে $\dfrac{S_1/S_2}{\sqrt{F_{\alpha/2, n_1, n_2}}}$ ও $\dfrac{S_1}{S_2}\sqrt{F_{\alpha/2, n_2, n_1}}$

(প্রসঙ্গক্রমে দেখা গেল σ_1^2/σ_2^2-এর অধঃ ও উর্ধ্ব আস্থাসীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2, n_1, n_2}} \text{ ও } \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\alpha/2, n_2, n_1})$$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = \gamma_0 \qquad \text{(অধিকাংশ ক্ষেত্রেই } \gamma_0 = 1 \text{)}$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$\text{নমুনাঙ্ক } F_{n_1, n_2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\gamma_0^2}$$

(এর বিভাজন n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন।)

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\,\alpha\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 > \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন F_{n_1, n_2}-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> F_{\alpha, n_1, n_2}$ হয়।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 < \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন F_{n_1, n_2}-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< F_{\overline{1-\alpha}, n_1, n_2}$ হয়,

অর্থাৎ $< \dfrac{1}{F_{\alpha, n_2, n_1}}$ হয়। (নীচের টীকা দ্রষ্টব্য)।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 \neq \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন F_{n_1, n_2}-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> F_{\alpha/2, n_1, n_2}$ হয় বা $< F_{\overline{1-\alpha/2}, n_1, n_2}$ হয়, অর্থাৎ $< \dfrac{1}{F_{\alpha/2, n_2, n_1}}$ হয়। (নীচের টীকা দ্রষ্টব্য)।

[**টীকা**। অনুচ্ছেদ 13.6.7-এ প্রমাণ করা হয়েছে যে যদি F বিভাজনের স্বাতন্ত্র্যমাত্রা n_1 ও n_2 হয় তবে $\dfrac{1}{F}$-এর বিভাজন n_2 ও n_1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন হবে। তা থেকেই দেখা যায়

$$F_{\overline{1-\alpha}, n_1, n_2} = 1/F_{\alpha, n_2, n_1} \;]$$

যখন $\gamma_0 = 1$ হয়, তখন উভয় পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প বিচারের ক্ষেত্রে F-এর সংজ্ঞা এমন করা যায় যে $F = S_1^2/S_2^2$ বা S_2^2/S_1^2 যেন $F \geqslant 1$ হয়,

অর্থাৎ S_1^2 ও S_2^2-এর মধ্যে যেটি বড় সেটি ভগ্নাংশের লবে লেখা হবে। তাহলে উপযুক্ত স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $F > F_{\alpha/2}$ (অর্থাৎ $F > F_{\alpha/2, n_1, n_2}$ বা $F > F_{\alpha/2, n_2, n_1}$, যেখানে যেমন প্রযোজ্য) হলেই মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে।

F-বিভাজনের এই সমস্ত শতকরা বিন্দু পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণী প্রথমভাগে পাওয়া যাবে। ঐ সারণীতে বিভিন্ন উর্ধ্ববিন্দুগুলিই দেওয়া আছে। অধঃবিন্দুগুলি উপরিলিখিত পন্থায় পাওয়া যাবে।

(C) μ_1, μ_2, σ_1 ও σ_2 কোনটাই জানা নেই, তবে দেওয়া আছে যে $\sigma_1 = \sigma_2$.

$(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে, $$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s' \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}.$$

(যেখানে, $$s'^2_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2/(n_1 - 1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 - n_1 \bar{x}_1^2 \right) \Big/ (n_1 - 1)$$

$$s'^2_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2/(n_2 - 1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 - n_2 \bar{x}_2^2 \right) \Big/ (n_2 - 1)$$

$$s'^2 = \{(n_1 - 1)s'^2_1 + (n_2 - 1)s'^2_2\}/(n_1 + n_2 - 2)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \right\} \Big/ (n_1 + n_2 - 2)$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2+\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2-n_1\bar{x}_1^2-n_2\bar{x}_2^2\right\}\Big/(n_1+n_2-2)$$

[এ n_1+n_2-2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t-বিভাজন অনুসরণ করে।] আমরা দেখতে পাই

$$P\left[t_{-a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}} \leqslant \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s'\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \leqslant t_{a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}}\right]=1-a$$

অর্থাৎ, $P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}}\, s'\sqrt{1/n_1+1/n_2} \leqslant (\mu_1-\mu_2)$
$\leqslant (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}}\, s'\sqrt{1/n_1+1/n_2}]=1-a$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-a)\%$ হলে $(\mu_1-\mu_2)$-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা-সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}}\, s'\sqrt{1/n_1+1/n_2}$ ও
$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{a/2,\,\overline{n_1+n_2-2}}\, s'\sqrt{1/n_1+1/n_2}$

আবার মুখ্য প্রকল্প $H: \mu_1-\mu_2=\delta_0$ বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$\text{নমুনাঙ্ক } t_{\overline{n_1+n_2-2}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\delta_0}{s'\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$$

[এর বিভাজন (n_1+n_2-2) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন।]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\,a\%$ হলে

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1-\mu_2>\delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $t_{\overline{n_1+n_2-2}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> t_{a,\,\overline{n_1+n_2-2}}$ হয়।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1-\mu_2<\delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $t_{\overline{n_1+n_2-2}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< t_{1-a,\,\overline{n_1+n_2-2}}$ হয়, অর্থাৎ $<-t_{a,\,\overline{n_1+n_2-2}}$ হয়।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \mu_1-\mu_2\neq\delta_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $|\,t_{\overline{n_1+n_2-2}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $| > t_{a/2,\,n_1+n_2-2}$ হয়।

এই পরিস্থিতিতে সমবিস্তৃতির শর্ত যদি পালিত না হয় তবে $(\mu_1 - \mu_2)$ সম্বন্ধে আস্থা-অন্তর নিরূপণ বা এর সম্বন্ধে কোন প্রকল্প বিচার এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে।

আবার σ_1/σ_2-এর আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

এখানে $F_{\overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}} = \dfrac{s'^2_1/s'^2_2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$

[এ $(n_1-1), (n_2-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন অনুসরণ করে।]
আমরা দেখতে পাই

$$P\left[F_{\overline{1-a/2},\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}} \leqslant \frac{s'^2_1/s'^2_2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \leqslant F_{a/2,\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}}\right] = 1-a$$

অর্থাৎ, $$P\left[\frac{s'^2_1/s'^2_2}{F_{a/2,\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}}} \leqslant \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leqslant \frac{s'^2_1}{s'^2_2} F_{a/2,\ \overline{n_2-1},\ \overline{n_1-1}}\right]$$
$$= 1-a.$$

অর্থাৎ, $$P\left[\frac{s'_1/s'_2}{\sqrt{F_{a/2,\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}}}} \leqslant \sigma_1/\sigma_2 \leqslant \frac{s'_1}{s'_2}\sqrt{F_{a/2,\ \overline{n_2-1},\ \overline{n_1-1}}}\right]$$
$$= 1-a.$$

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100\,(1-a)\,\%$ হলে σ_1/σ_2-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$\frac{s'_1/s'_2}{\sqrt{F_{a/2,\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}}}} \text{ ও } \frac{s'_1}{s'_2}\cdot\sqrt{F_{a/2,\ \overline{n_2-1},\ \overline{n_1-1}}}$$

(প্রসঙ্গক্রমে এখানেও দেখা গেল যে σ_1^2/σ_2^2-এর অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে $\dfrac{s'^2_1/s'^2_2}{F_{a/2,\ \overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}}}$ ও $\dfrac{s'^2_1}{s'^2_2}\cdot F_{a/2,\ \overline{n_2-1},\ \overline{n_1-1}}$).

আবার মুখ্যপ্রকল্প

$$H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = \gamma_0$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্যপ্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক $F_{\overline{n_1-1},\ \overline{n_2-1}} = \dfrac{s'^2_1/s^2_2}{\gamma_0^2}$

(এর বিভাজন (n_1-1) ও (n_2-1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত F বিভাজন)

সুতরাং, সংশয়মাত্রা 100% হলে,

(i) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 > \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $F_{\overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> F_{\alpha,\, \overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$ হয়।

(ii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 < \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $F_{\overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $< 1/F_{\alpha,\, \overline{n_2-1},\, \overline{n_1-1}}$ হয়।

(iii) বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1/\sigma_2 \neq \gamma_0$-এর ক্ষেত্রে, মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে, যখন $F_{\overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> F_{\alpha/2,\, \overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$ হয় বা $< 1/F_{\alpha/2,\, \overline{n_2-1}\, \overline{n_1-1}}$ হয়।

যখন $\gamma_0 = 1$ হয় তখন এই উভয় পাক্ষিক প্রকল্পবিচারের ক্ষেত্রে F-এর সংজ্ঞা এমন করা যায় যে $F = s'^2_1/s'^2_2$ বা s'^2_2/s'^2_1 যেন $F > 1$ হয়, অর্থাৎ s'^2_1 ও s'^2_2-এর মধ্যে যেটি বড় সেটি ভগ্নাংশের লবে লেখা হবে। তাহলে উপযুক্ত স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $F > F_{\alpha/2}$ (অর্থাৎ $F > F_{\alpha/2,\, \overline{n_1-1},\, \overline{n_2-1}}$ বা $F > F_{\alpha/2,\, \overline{n_2-1},\, \overline{n_1-1}}$, যেখানে যেমন প্রযোজ্য) হলেই মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে।

14.6.5 দ্বিচল নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

x ও y-এর একটি দ্বিচল নর্ম্যাল পূর্ণক ধরা হ'ল যার গড়দ্বয় μ_x ও μ_y, ভেদমানদ্বয় σ_x^2 ও σ_y^2 ও সহগাঙ্ক ρ। ধরলাম $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots ; (x_n, y_n)]$ এই পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি n আয়তনের সমসম্ভব নমুনা। (স্পষ্টতঃই অবক্ষেপণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।)

(A) ধরলাম σx, σy ও ρ জানা আছে, μ_x ও μ_y জানা নেই।

$(\mu_x - \mu_y)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

ধরলাম　　$v = x - y$

সুতরাং　　$E(v) = \mu_v = \mu_x - \mu_y$

এবং　　$V(v) = \sigma^2_v = \sigma^2_x + \sigma_y^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y$

সুতরাং প্রমাণ নর্ম্যাল চল $\xi = \dfrac{\bar{v} - \mu_v}{\sigma_v/\sqrt{n}}$ যেখানে $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i/n$

[এ $N(0, 1)$ বিভাজন অনুসরণ করে]।

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে $(\mu_x-\mu_y)$-এর অধঃ ও উর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$\bar{v}-\xi_{\alpha/2}\frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} \text{ এবং } \bar{v}+\xi_{\alpha/2}\frac{\sigma_v}{\sqrt{n}}$$

আবার মুখ্যপ্রকল্প

$$H_0 : \mu_x-\mu_y=\delta_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে মুখ্য প্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক $\xi=\dfrac{\bar{v}-\delta_0}{\sigma_v/\sqrt{n}}$

[এর বিভাজন $N(0, 1)$]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে প্রমাণ নর্ম্যাল বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণ-পুচ্ছান্ত, বামপুচ্ছান্ত ও উভয়পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $\mu_x-\mu_y>\delta_0$, $\mu_x-\mu_y<\delta_0$ ও $\mu_x-\mu_y\neq\delta_0$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে।

(B) ধরলাম $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ ও ρ কোনটাই জানা নেই। $\mu_x-\mu_y$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

$$t_{\overline{n-1}}=\frac{\bar{v}-\mu_v}{s'_v/\sqrt{n}} \text{ যেখানে } s'^2_v=\sum_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})^2/(n-1)$$

$$=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^2-n\bar{v}^2\right)\Big/(n-1)\right]$$

[-এ $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন অনুসরণ করে]।

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100\,(1-\alpha)\%$ হলে $(\mu_x-\mu_y)$-এর অধঃ ও উর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$\bar{v}-t_{\alpha/2,\,\overline{n-1}}\frac{s'v}{\sqrt{n}} \text{ এবং } \bar{v}+t_{\alpha/2,\,\overline{n-1}}\frac{s'v}{\sqrt{n}}$$

আবার মুখ্যপ্রকল্প

$$H_0 : \mu_x-\mu_y=\delta_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে মুখ্যপ্রকল্পানুসারে

নমুনাঙ্ক $t_{\overline{n-1}}=\dfrac{\bar{v}-\delta_0}{s'_v/\sqrt{n}}$

[এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন]

সুতরাং সংশয়মাত্রা 100a% হলে $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজনের 100a% দক্ষিণপুচ্ছান্ত, বামপুচ্ছান্ত ও উভয়পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $\mu_x-\mu_y > \delta_0$, $\mu_x-\mu_y < \delta_0$ ও $\mu_x-\mu_y \neq \delta_0$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে।

যদি আমরা $\mu_x/\mu_y=\eta$ মুখ্য প্রকল্পে মনোযোগী হই তবে

$$v=x-\eta y$$

ধরে পূর্বের মত অগ্রসর হতে হবে। এখানে অবশ্য $\mu_v=0$,

অতএব $\dfrac{\bar{v}}{\sigma_v/\sqrt{n}}$-এর বিভাজন $N(0, 1)$

এবং $\dfrac{\bar{v}}{s'_v/\sqrt{n}}$-এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন। এথেকে পূর্বের ন্যায় অগ্রসর হয়ে η-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ বা মুখ্য প্রকল্প $H_0: \eta=\eta_0$ বিচার করা সম্ভব।

পূর্ণকের সহগাঙ্ক ρ-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ বা সাধারণ মুখ্য প্রকল্প

$$H_0: \rho=\rho_0$$

বিচার এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে। তাই সে আলোচনা করা হ'ল না। পরের পরিচ্ছেদে আসন্নভাবে এ সকল কাজ কীভাবে করা যায় তা আলোচনা করা হবে।

আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে কেবলমাত্র মুখ্য প্রকল্প

$$H_0: \rho=0$$

বিচার করতে পারি।

মুখ্য প্রকল্পানুসারে নমুনাঙ্ক $t_{n-2}=\dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

যেখানে $r=x$ ও y-এর নমুনাজ সহগতি

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

[এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন]

(এর প্রমাণও এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে।)

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণপুচ্ছান্ত, বামপুচ্ছান্ত ও উভয়পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $\rho > 0$, $\rho < 0$ ও $\rho \neq 0$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে।

μ_x ও μ_y জানা থাকলে

নমুনাঙ্ক $t_{\overline{n-1}} = \frac{r'\sqrt{n-1}}{1-r'^2}$

[এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন]

যেখানে $$r' = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_y)^2}}$$

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণতঃ μ_x ও μ_y জানা থাকে না।

যদি আমরা এবার $\sigma_x/\sigma_y = \gamma$ মুখ্য প্রকল্পে মনোযোগী হই তবে

ধরলাম $u = x + \gamma y$

$v = x - \gamma y$

এখন $\text{cov}(u, v) = \text{cov}(x + \gamma y, x - \gamma y)$

$= v(x) - \gamma^2 v(y)$

$= 0.$

সুতরাং u ও v দুইটি নর্ম্যাল চল যাদের সহগাঙ্ক $\rho_{uv} = 0.$

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \gamma = \gamma_0$

বিচার করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে,

$$H_o : \gamma = \gamma_0$$

$$\equiv H_o : \rho_{uv} = 0 \quad \text{যেখানে} \quad u = x + \gamma_0 y$$

$$\text{ও} \quad v = x - \gamma_0 y$$

মুখ্যপ্রকল্পানুসারে নমুনাঙ্ক t_{n-2}

$$= \frac{r_{uv}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{uv}}}$$

(যেখানে $r_{uv} = u$ ও v-এর মধ্যে নমুনাজ সহগাঙ্ক)

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 \sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\bar{u}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - n\bar{v}^2\right)}}$$

[এর বিভাজন $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100a\%$ হলে $(n-2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজনের $100a\%$ দক্ষিণপুচ্ছান্ত, বামপুচ্ছান্ত ও উভয়পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $\gamma > \gamma_0$, $\gamma < \gamma_0$ ও $\gamma \neq \gamma_0$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে, কারণ বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \gamma > \gamma_0 \equiv H : \rho_{uv} > 0$,

$$H : \gamma < \gamma_0 \equiv H ; \rho_{uv} < 0 \text{ এবং}$$

$$H : \gamma \neq \gamma_0 \equiv H : \rho_{uv} \neq 0.$$

γ-এর অন্তর প্রাক্কলন এখানে আলোচনা করা হ'ল না, কারণ এ আলোচনা এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে।

এ ক্ষেত্রেও μ_x ও μ_y জানা থাকলে

$$\text{নমুনাঙ্ক} \quad t_{n-1} = \frac{r'_{uv}\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-r'^2_{uv}}}$$

[এর বিভাজন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t বিভাজন।]

14.6.6 সরল নির্ভরণ সংশ্লিষ্ট পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম x ও y দুইটি চল, তন্মধ্যে x সম্ভাবনা নিরপেক্ষ ও y সম্ভাবনাশ্রয়ী। x-এর উপর নির্ভরশীল y-এর শর্তাধীন বিভাজন যেন নর্ম্যাল যেখানে

$$E(y|x) = \eta_x = \alpha + \beta x$$

ও $$V(y|x) = \sigma^2$$

অর্থাৎ পূর্ণকে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ ঋজুরৈখিক এবং তা হ'ল

$$\alpha + \beta x$$

ধরলাম $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ একটি n আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা। ধরলাম নমুনাতে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ রেখা হচ্ছে

$$Y = a + bx$$

যেখানে $$b = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

ও $$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

α-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে

প্রমাণ নর্ম্যাল চল $$\xi = \frac{a - \alpha}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2}}$$

যদি σ জানা থাকে

ও $$t_{n-2} = \frac{a - \alpha}{s' \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2}}$$

যদি σ জানা না থাকে

যেখানে $$s'^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 / (n-2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} y_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \Big/ (n-2)$$

ব্যবহার করতে হবে।

আবার β-র আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে

প্রমাণ নর্ম্যাল চল $\xi = \dfrac{b-\beta}{\sigma\sqrt{1\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$, যদি σ জানা থাকে

ও $t_{n-2} = \dfrac{b-\beta}{s'\sqrt{1\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$, যদি σ জানা না থাকে

ব্যবহার করতে হবে।

তারপর, মুখ্য প্রকল্প

$$H_o : a = a_0$$

বিচার করতে হলে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

নমুনাঙ্ক (প্রমাণ নর্ম্যাল চল) $\xi = \dfrac{a-a_0}{\sigma\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\Big/n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$

যদি σ জানা থাকে

ও নমুনাঙ্ক $t_{n-2} = \dfrac{a-a_0}{s'\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\Big/n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$

যদি σ জানা না থাকে

ব্যবহার করতে হবে।

এবং মুখ্য প্রকল্প

$$H_o : \beta = \beta_o$$

বিচার করতে হলে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

নমুনাঙ্ক $\xi = \dfrac{b-\beta_o}{\sigma\sqrt{1\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$, যদি σ জানা থাকে

ও নমুনাঙ্ক $t_{n-2} = \dfrac{b-\beta_o}{s'\sqrt{1\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$, যদি σ জানা না থাকে

ব্যবহার করতে হবে।

এখন প্রতি ক্ষেত্রে পূর্বের মতো বিভিন্ন বৈকল্পিক প্রকল্পে বর্জনাঞ্চল নির্ণয় করা যাবে।

কোন নির্দিষ্ট x-এর জন্য

$$Y = a + bx$$

এর বিভাজন নর্ম্যাল।

$$E(Y|x) = E(a+bx) = \alpha + \beta x = \eta_x$$

$$V(Y|x) = V(a+bx) = V\{a' + b(x-\bar{x})\} = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right\}$$

η_x-এর আস্থা অন্তর নিরূপণের জন্য কাজে লাগবে

$$\xi = \frac{Y - \eta_x}{\sigma \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \text{ যদি } \sigma \text{ জানা থাকে}$$

$$t_{n-2} = \frac{Y - \eta_x}{s' \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \text{ যদি } \sigma \text{ জানা না থাকে।}$$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \eta_x = \eta_x{}^0$$

বিচার করতে গেলে কাজে লাগবে

$$\xi = \frac{Y - \eta_x{}^0}{\sigma \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \text{ যদি } \sigma \text{ জানা থাকে}$$

$$t_{n-2} = \frac{Y - \eta_x^{\circ}}{s'\left\{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$ যদি σ জানা না থাকে

এ প্রসঙ্গে নীচের বিষয়টি প্রণিধানযোগ্য ও দ্রষ্টব্য।

নির্দিষ্ট x-এর জন্য $y - Y$-এর বিভাজন নর্ম্যাল

$$E(y - Y|x) = 0$$

$$V(y - Y|x) = \sigma^2\left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}$$

সুতরাং $$P\left[Y - \xi_{a/2}\,\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-x)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}} \leqslant y\right.$$

$$\left.\leqslant Y + \xi_{a/2}\,\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-x)^2}{\sum_{=1}^{n}(x_i-x)^2}}\right] = 1 - a$$

সুতরাং নির্দিষ্ট x-এর জন্য y-এর মানের পূর্বাভাস পাওয়া যায়। $100(1-a)\%$ আস্থা নিয়ে আমরা y-এর সম্বন্ধে পূর্ব থেকেই আভাস দিতে পারি যে এটা

$$Y \mp \xi_{a/2}\,\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-x)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}}$$

সীমাদ্বয়ের মধ্যে থাকবে।

σ-জানা না থাকলে সীমাদ্বয় হবে

$$Y \mp t_{a/2,\,\overline{n-2}}\,s'\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-x)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}}$$

দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ সরল নির্ভরণ

$$E(y|x)=\eta_x=\alpha_1+\beta_1 x$$

এবং $$E(y|x)=\eta_x=\alpha_2+\beta_2 x$$

এর তুলনা করাও সম্ভব। উভয় ক্ষেত্রেই $V(y)=\sigma^2$ বলে ধরা হবে। এ দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল বিভাজনের গড়ের তুলনার সদৃশ।

যদি $(x_{1i}, y_{1i}), (i=1, 2, \cdots, n_1)$

এবং $(x_{2i}, y_{2i}), (i=1, 2, \cdots, n_2)$

দুইটি পূর্ণক থেকে n_1 ও n_2 আয়তনের দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা হয় এবং নমুনাজ সরল নির্ভরণ দুইটি

$$Y=a_1+b_1 x$$

এবং $$Y=a_2+b_2 x$$

হয়, তবে σ জানা থাকলে, মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \alpha_1=\alpha_2$$

এর জন্য

$$\xi=\frac{a_1-a_2}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 \Big/ n_1\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 \Big/ n_2\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}}$$

যেখানে $\bar{x}_1=\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} \Big/ n_1$ ও $\bar{x}_2=\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} \Big/ n_2$

এবং মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \beta_1=\beta_2$$

এর জন্য

$$\xi=\frac{b_1-b_2}{\sigma\sqrt{1\Big/\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+1\Big/\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}}$$

ব্যবহার্য।

σ জানা না থাকলে উভয় ক্ষেত্রেই σ-র পরিবর্তে s' বসাতে হবে এবং উভয় বিভাজনই (n_1+n_2-4) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t হবে, যেখানে

$$s'^2=\frac{(n_1-2)s_1'^2+(n_2-2)s_2'^2}{n_1+n_2-4}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(y_{1i}-a_1-b_1x_{1i})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_{2i}-a_2-b_2x_{2i})^2}{n_1+n_2-4}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}y_{1i}^2-a_1\sum_{i=1}^{n_1}y_{1i}-b_1\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}y_{1i}+\sum_{i=1}^{n_2}y_{2i}^2-a_2\sum_{i=1}^{n_2}y_{2i}-b_2\sum_{i=1}^{n_2}x_{2i}y_{2i}}{n_1+n_2-4}$$

14.6.7 বহুচল নর্ম্যাল পূর্ণকের আংশিক ও বহুল সহগাঙ্ক :

ধরা যাক p-সংখ্যক চল $x_1, x_2, \ldots, x_p$-এর যৌথ বিভাজন p-চল নর্ম্যাল। আরও ধরা যাক পূর্ণকে x_1 ও x_2 উভয় চল থেকে তাদের উপরে ক্রিয়াশীল $x_3, x_4, \ldots,$ ও x_p-এর প্রভাব অপসারিত করলে x_1 ও x_2-এর মধ্যে আংশিক সহগাঙ্ক যেন $\rho_{12\cdot34\ldots p}$ হয়।

$n(> p+1)$ আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনাতে অনুরূপ আংশিক সহগাঙ্ক ধর যেন $r_{12\cdot34\ldots p}$.

মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \rho_{12\cdot34\ldots p}=0.$$

বিচার করতে গেলে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

$$\text{নমুনাঙ্ক} \quad t_{n-p}=\frac{r_{12\cdot34\ldots p}\sqrt{n-p}}{\sqrt{1-r^2_{12\cdot34\ldots p}}}$$

কার্যকর হবে।

আবার ধরা যাক পূর্ণকে $x_2, x_3, \ldots, x_p$-এর উপরে x_1-এর বহুল সহগাঙ্ক যেন $\rho_{1\cdot23\ldots p}$ হয়। নমুনাতে এ যেন $r_{1\cdot23\ldots p}$.

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho_{1\cdot 23\cdots p}=0$

বিচার করত গেলে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

$$\text{নমুনাঙ্ক} \quad F_{\overline{p-1}, \overline{n-p}} = \frac{r^2_{1\cdot 23\cdots p}|(p-1)}{(1-r^2_{1\cdot 23\cdots p})|(n-p)}$$

কার্যকর হবে।

এখানে একমাত্র বৈকল্পিক প্রকল্প হচ্ছে

$$H_0 : \rho_{1\cdot 23\cdots p} > 0$$

তজ্জন্য এই F বিভাজনের দক্ষিণ পুচ্ছান্ত বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে।

14.7 প্রভেদ বিশ্লেষণ (Analysis of variance) :

কতকগুলি অবেক্ষণের অন্তর্নিহিত সম্পূর্ণ ভেদাভেদকে কোন কোন অবস্থায় রাশিতথ্যের শ্রেণী-বিন্যাসের উপর নির্ভর করে কয়েকটি অংশে বিভক্ত করা যায়। নিয়মানুগ এই প্রক্রিয়াকে প্রভেদ বিশ্লেষণ বলে। রাশিবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে এই প্রভেদ বিশ্লেষণ একটি মুখ্যস্থান অধিকার ক'রে আছে। এই প্রভেদ বিশ্লেষণের সাহায্যে আমরা অনেক প্রকল্প বিচার করতে সমর্থ হই।

ধরা যাক k-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ পূর্ণকের প্রত্যেকটিতে x চলটি নর্ম্যাল-ভাবে নিবেশিত। আরও ধরা যাক i তম পূর্ণকের গড় μ_i, এবং পূর্ণকগুলির ভেদমান সমান। (এই সমান ভেদমানের নাম দেওয়া হল σ^2, অবশ্য একে অজানা বলে ধরা হবে)।

প্রতি পূর্ণক থেকে পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করা হ'ল, i-তম পূর্ণক থেকে নমুনার আয়তন যেন n_i ($\geqslant 2$-অন্ততঃ একটি i-এর জন্য) এবং অবেক্ষণগুলি যেন

$$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k)$$

$$k\text{-সংখ্যক নমুনার মোট আয়তন} = \sum_{i=1}^{k} n_i = n \text{ ধরা হ'ল।}$$

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে নীচের মুখ্য প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

$$H_0 : (\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k)$$

এর বৈকল্পিক প্রকল্প হ'ল

$$H_0 : (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k \text{ সকলে সমান নয়})$$

ধরলাম　$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$

এখন　x_{ij}-এর বিভাজন $N(\mu_i, \sigma^2)$

সুতরাং　ε_{ij}-এর বিভাজন $N(0, \sigma^2)$

আরও ধরলাম

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \Big/ n_i, \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \Big/ n = \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i \Big/ n$$

এবং　$$\bar{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij} \Big/ n_i, \quad \bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij} \Big/ n = \sum_{i=j}^{k} n_i \bar{\varepsilon}_i \Big/ n.$$

$\mu_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ এর প্রাক্কলনের উদ্দেশ্যে

$$U = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left\{x_{ij} - E(x_{ij})\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \mu_i\right)^2$$

কে μ_i-এর দিক থেকে লঘিষ্ঠ করতে হবে।

লঘিষ্ঠ বর্গ সমীকরণ হ'ল

$$\frac{\partial U}{\partial \mu_i} = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, k$$

ফলে　$\hat{\mu}_i = \bar{x}_i, \ i = 1, 2, \ldots, k$

এখন,　$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$

সুতরাং,　$\bar{x}_i = \mu_i + \bar{\varepsilon}_i$

এবং　$\bar{x} = \bar{\mu} + \bar{\varepsilon}$　যেখানে $\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{k} n_i \mu_i / n$

আবার,　$E(\varepsilon_{ij}) = 0$, সুতরাং, $E(\varepsilon_{ij}^2) = V(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$

$E(\bar{\varepsilon}_i) = 0$, সুতরাং, $E(\bar{\varepsilon}_i^2) = V(\bar{\varepsilon}_i) = \sigma^2/n_i$

$E(\bar{\varepsilon}) = 0$, সুতরাং, $E(\bar{\varepsilon}^2) = V(\bar{\varepsilon}) = \sigma^2/n$

আমরা দেখতে পাই

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{k} n_i, (\bar{x}_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2\text{-কে}$$

বলা হয় সমগ্র বর্গ সমষ্টি (Total sum of squares)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\text{-কে}$$

বলা হয় অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি (Within class sum of squares)

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2\text{-কে}$$

বলা হয় আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি (Between class sum of squares)

সুতরাং সমগ্র বর্গ সমষ্টি দুইভাগে বিভক্ত হয়েছে, যথা

(i) আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি

(ii) অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি

সমগ্র বর্গ সমষ্টিতে n-সংখ্যক চল যথা $(x_{ij}-\bar{x})$, $i=1, 2, \ldots, k$ $j=1, 2, \ldots, n_i$; এর বর্গ যোগ করা হয়েছে, যাদের মধ্যে একটি সম্বন্ধ আছে, যথা $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})=0$; তাই বলা হয় সমগ্র বর্গ সমষ্টির স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(n-1)$।

আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টিতে k-সংখ্যক চল, যথা $(\bar{x}_i-\bar{x})$, $i=1, 2, \ldots, k$; এর ভারযুক্ত বর্গ যোগ করা হয়েছে, যাদের মধ্যে একটি সম্বন্ধ আছে, যথা

$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{x}) = 0$; তাই বলা হয় আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টির স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(k-1)$।

অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টিতে n সংখ্যক চল, যথা $(x_{ij} - \bar{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n_i$-এর বর্গ যোগ করা হয়েছে, যাদের মধ্যে k-সংখ্যক সম্বন্ধ আছে, যথা $\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$; তাই বলা হয় অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টির স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(n-k)$।

এখন, E (আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি)

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2\right.$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu} + \varepsilon_i - \varepsilon)\right\}^2$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\varepsilon_i - \varepsilon)^2\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\varepsilon_i^2 - n\varepsilon^2\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2 + (k-1)\sigma^2$$

E (অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি)

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_i)^2\right\}$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\varepsilon}_i^2\right)$$

$$= (n-k)\sigma^2.$$

আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টিকে $(k-1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফলকে বলে আন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ এবং অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টিকে $(n-k)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফলকে বলে অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ।

তাই দেখা যাচ্ছে

$$E\,(\text{আন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ})$$

$$= \frac{E\,(\text{আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি})}{k-1}$$

$$= \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2 + \sigma^2$$

$$= \sigma_1^2. \qquad (\text{এ ভাবে সূচিত করা হ'ল})$$

এবং $$E\,(\text{অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ})$$

$$= \frac{E\,(\text{অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি})}{n-k}$$

$$= \sigma^2.$$

এখন মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad (\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k)$$

এবং বৈকল্পিক প্রকল্প

$$H : \quad (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \text{ সকলে সমান নয়})$$

যথাক্রমে মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad \sigma_1^2 = \sigma^2$$

এবং বৈকল্পিক প্রকল্প

$$H : \quad \sigma_1^2 > \sigma^2$$

এর সদৃশ, কারণ মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী $\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2 = 0$.

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, এই প্রকল্প বিচার করতে গেলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

$$F_{\overline{k-1},\ \overline{n-k}} = \frac{\text{আন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ}}{\text{অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ}}$$

সুতরাং সংশয়মাত্রা 100α% হলে মুখ্য প্রকল্প বর্জন করা হবে তখনই যখন নমুনালব্ধ F-এর অবেক্ষিত মান $> F_{\alpha,\ \overline{k-1},\ \overline{n-k}}$

আমরা স্পষ্টই দেখতে পাই যে মুখ্য প্রকল্প সত্য হোক বা না হোক σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক সর্বদাই অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ। যেহেতু ε_{ij} গুলি অবেক্ষণের ভ্রান্তি এবং ভেদমান $\varepsilon_{ij} = \sigma^2$. তাই অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গকে ভ্রান্তি গড় বর্গও বলে। মুখ্য প্রকল্প সত্য হলে অবশ্য σ^2-এর অপর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলকদ্বয় আন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ ও সমগ্র গড় বর্গ (যেটি সমগ্র বর্গ সমষ্টিকে $(n-1)$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়)। তন্মধ্যে শেষেরটিই উৎকৃষ্ট, কারণ এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা বেশী।

F যদি সংশয়াত্মক হয়, তবে আমরা মুখ্য প্রকল্প

$$H_0:\quad \mu_i = \mu_{i'}$$

বিচারে ইচ্ছুক হতে পারি। সেক্ষেত্রে

$$t_{\overline{n-k}} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i'}}{\sqrt{\text{অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ} \times \left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_{i'}}\right)}}$$

কার্যকর হবে

যদি $n_i = n_{i'}$ ($= n_0$ ধরলাম) হয়, তবে

$$t_{\overline{k(n_0-1)}} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i'}}{\sqrt{\text{অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ} \times \dfrac{2}{n_0}}}$$

যদি $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$ হয় তাহলে দুইটি দুইটি ক'রে গড়ের তুলনা করতে হলে আমরা

$$\sqrt{\text{অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ} \times \frac{2}{n_0}} \times t_{\frac{\alpha}{2},\ k(n_0-1)}$$

একবারে বের করে রাখতে পারি। একে বলা হয় প্রত্যন্ত পার্থক্য বা লঘিষ্ঠ সংশয়াত্মক পার্থক্য (critical difference or least significant difference)

যদি দেখা যায় যে কোন

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_{i'}| > \text{প্রত্যন্ত পার্থক্য}$$

তবে মুখ্য প্রকল্প

$$H_0: \quad \mu_i = \mu_{i'}$$

বর্জন করা হয়। এই বিচারের সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ এবং এখানে বৈকল্পিক প্রকল্প

$$H: \quad \mu_i \neq \mu_{i'}$$

$\bar{y}_i (i=1, 2, \ldots, k)$-গুলিকে মানের অধঃক্রমানুসারে সাজিয়ে প্রত্যন্ত পার্থক্যের সঙ্গে তুলনা করে কোন্ কোন্ গড়যুগলের মধ্যে সংশয়াত্মক পার্থক্য আছে তা বের করা যায়।

প্রভেদ বিশ্লেষণের কাজটি নীচে নিয়মানুগভাবে দেখান হচ্ছে।

সারণি 14.1 একধারা শ্রেণীবিন্যাস

	A_1	A_2	$\cdots$	A_i	$\cdots$	A_k
	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{i1}	$\cdots$	x_{k1}
	x_{12}	x_{22}	$\cdots$	x_{i2}	$\cdots$	x_{k2}
	x_{1n_1}	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
		x_{2n_2}		$\cdots$		$\cdots$
				x_{in_i}	$\cdots$	$\cdots$
						x_{kn_k}
যোগফল	T_1	T_2	$\cdots$	T_i	$\cdots$	T_k

গণনা পদ্ধতি

(i) নমুনার আয়তনসমূহের যোগফল নির্ণয় করা হ'ল

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

(ii) প্রতি শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা হ'ল

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

(iii) সমগ্র যোগফল নির্ণয় করা হ'ল

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i$$

(iv) শুদ্ধি উপকরণ (correction factor) নির্ণয় করা হ'ল

এটি হচ্ছে T^2/n

(v) অশোধিত সমগ্র বর্গ সমষ্টি নির্ণয় করা হ'ল

$$\text{এটি হচ্ছে } \sum_{i=1}^{k} x_{ij}^2$$

(vi) $\sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i}$ নির্ণয় করা হ'ল

$$\text{(vii) সমগ্র বর্গ সমষ্টি} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$$

= অশোধিত বর্গ সমষ্টি—শুদ্ধি উপকরণ

$= (v) - (iv)$

$$\text{(viii) আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি} = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{x}_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - \text{শুদ্ধি উপকরণ}$$

$= (vi) - (iv)$

(ix) অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি = সমগ্র বর্গ সমষ্টি − আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি

$= (vii) - (viii)$

সুবিধার জন্য মাপন মূল বিন্দু (বা মাপন ভিত্তি) ও মাপন মাত্রার পরিবর্তন সাধন করা যায়। তাতে বিচারের কোন পরিবর্তন হয় না।

সারণি 14·2 প্রভেদ বিশ্লেষণ সারণি

প্রভেদের কারণ	স্বাতন্ত্র্যমাত্রা	বর্গ সমষ্টি	গড় বর্গ = বর্গ সমষ্টি / স্বাতন্ত্র্যমাত্রা	F	F 5% বিন্দু	F 1% বিন্দু
আন্তঃ-গোষ্ঠীক	$k-1$	$\sum_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i}$ − শুদ্ধিকরণ	আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি / $k-1$	আন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ / অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গ		
অন্তঃ-গোষ্ঠীক বা ভ্রান্তি	$n-k$ [নীচেরটি থেকে উপরেরটি বিয়োগ ক'রে]	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i}$ [নীচেরটি থেকে উপরেরটি বিয়োগ করে]	অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টি / $n-k$			
সমগ্র	$n-1$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$ − শুদ্ধিকরণ				

আন্তঃগোষ্ঠীক ও অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গ সমষ্টিদ্বয়ের যোগফল সমগ্র বর্গ সমষ্টি কিন্তু আন্তঃগোষ্ঠীক ও অন্তঃগোষ্ঠীক গড় বর্গদ্বয়ের যোগফল সমগ্র গড় বর্গ নয়, তাই যদিও এই পদ্ধতিকে প্রভেদ বিশ্লেষণ বলা হয়, আসলে ইহা বর্গ সমষ্টি বিশ্লেষণ।

14·8 উদাহরণমালা :

14·8·1 একজন খদ্দের অনেকদিনের অভিজ্ঞতা থেকে দেখে আসছেন যে, তিনি যাঁর কাছ থেকে জিনিসপত্র কেনেন তাঁর জিনিসপত্র সাধারণতঃ 20% ত্রুটিপূর্ণ। নতুন একজন বিক্রেতা দাবি করেন যে তিনি একই দামে যে জিনিস-পত্র দেবেন তা 20% এর চেয়ে কম ত্রুটিপূর্ণ হবে। তাঁর জিনিসপত্র থেকে

পরস্পর নিরপেক্ষ 30টি জিনিসের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করে 2টি ত্রুটিপূর্ণ জিনিস পাওয়া গেল। নতুন বিক্রেতার দাবি সত্য বলে গ্রহণ করতে পার কি? নমুনাতে 3টি ত্রুটিপূর্ণ জিনিস পাওয়া গেলেই বা তোমার মন্তব্য কী হবে?

নতুন বিক্রেতার ক্ষেত্রে পরস্পর নিরপেক্ষ 30টি জিনিসের যে সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয়েছে তাতে ত্রুটিপূর্ণ মালের সংখ্যা দ্বিপদ চল বলে ধরা যায়। ঐ বিভাজনের অজানা পূর্ণকাঙ্ক ধর P।

তা হলে মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : P = 0{\cdot}2$$

এবং বৈকল্পিক প্রকল্প

$$H : P < 0{\cdot}2$$

এখন

$$P[x \leqslant 2/P = 0{\cdot}2] = \sum_{x=0}^{2} \binom{30}{x} (0{\cdot}8)^{30-x} (0{\cdot}2)^{x} = 0{\cdot}04418\ ।$$

এই সম্ভাবনা 0·05-এর কম বলে 5% সংশয়মাত্রায় H_0 গ্রহণযোগ্য নয়। অতএব নতুন বিক্রেতার দাবি গ্রহণ করা যেতে পারে।

পুনরায়

$$P[x \leqslant 3/P = 0{\cdot}2] = \sum_{x=0}^{3} \binom{30}{x} (0{\cdot}8)^{30-x} (0{\cdot}2)^{x} = 0{\cdot}12271\ ।$$

এই সম্ভাবনা কিন্তু 0·05 এর বেশী। তাই 5% সংশয়মাত্রায় H_0 গ্রহণযোগ্য। সুতরাং এক্ষেত্রে নতুন বিক্রেতার দাবি সত্য বলে মনে করা যেতে পারে না।

14·8·2 নমুনা হিসাবে 4টি এক মিটারের বৈদ্যুতিক তার পরীক্ষা ক'রে দেখা গেল যে তাতে যথাক্রমে 2, 0, 2 ও 3টি স্থানে ত্রুটি আছে। তারের মালিক দাবি করেন যে প্রতি 100 মিটারে 120টির বেশী ত্রুটিপূর্ণ স্থান নেই। তাঁর দাবি গ্রহণযোগ্য বলে মনে কর কি?

প্রতি মিটার তারে ত্রুটিপূর্ণ স্থানের সংখ্যা পোয়াসঁ চল বলে ধরা যায়। এই বিভাজনের পূর্ণকাঙ্ক যেন λ

এখানে মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \lambda = 1{\cdot}2$$

এবং বৈকল্পিক প্রকল্প

$$H : \lambda > 1{\cdot}2$$

ধরলাম $x_i = i$-তম তারে ত্রুটিপূর্ণ স্থানের সংখ্যা, $i = 1, 2, 3, 4$ নমুনাটি সমসম্ভব ও অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ ধরা হ'ল।

সুতরাং $$x = \sum_{i=1}^{4} x_i$$

একটি পোয়াসঁ চল, যার পূর্ণাঙ্ক 1·2 × 4 অর্থাৎ 4·8, যদি H_0 সত্যি হয়।

$r =$ চারটি তারে মোট ত্রুটিপূর্ণ স্থানের সংখ্যা

$= 2 + 0 + 2 + 3 = 7$

এখন $$P(x > 7/\lambda = 4\cdot8) = \sum_{x=7}^{\infty} e^{-4\cdot8} \frac{(4\cdot8)^x}{x\,!} = 0\cdot209195$$

এই সম্ভাবনা 0·5 এর বেশী। সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় H_0 গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ মালিকের দাবি সঙ্গত বলে গ্রহণ করা চলতে পারে।

14.8.3 পরস্পর নিরপেক্ষ 13 জন রোগীর একটি সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ ক'রে তাদের প্রত্যেককে একটি ঘুমের ওষুধ A খাওয়ান হ'ল। আবার 12 জন রোগীর ঐরূপ একটি নমুনা নিয়ে তাদের প্রত্যেককেও অপর একটি ঘুমের ওষুধ B খাওয়ান হ'ল। নীচে 2টি ওষুধের ফলে বাড়তি ঘুমের পরিমাণ দেওয়া হ'ল।

বাড়তি ঘুমের পরিমাণ (ঘণ্টায়)

ওষুধ A	ওষুধ B
0·7	0·8
—1·1	1·8
—0·2	1·9
1·2	—0·6
0·1	2·7
3·4	2·5
3·7	1·4
2·0	—1·2
1·4	—0·9
3·6	2·1
—0·9	3·6
2·8	1·8
1·7	

নীচের মন্তব্য দুইটি পরীক্ষা ক'রে দেখ :

(i) কোন ওষুধই কার্যকর নয়।

(ii) দুইটি ওষুধই সমান কার্যকর।

যাই হোক না কেন প্রতি ওষুধের জন্য বাড়তি ঘুমের 95% আস্থা সীমা নির্ণয় কর। ওষুধ দুটির ফলে বাড়তি ঘুমের বিয়োগফলেরও 95% আস্থা সীমা নির্ণয় কর।

ধরলাম অসীম সংখ্যক রোগীর উপর ওষুধ A প্রয়োগ করলে বাড়তি ঘুমের গড় পরিমাণ হয় μ_1 ঘণ্টা এবং অপর একটি নিরপেক্ষ অসীম সংখ্যক রোগীর উপরে ওষুধ B প্রয়োগ করলে বাড়তি ঘুমের গড় পরিমাণ হয় μ_2 ঘণ্টা। এখন নীচের প্রকল্পগুলি বিচার করে দেখতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_1 = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu_1 > 0$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_2 = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu_2 > 0$

(iii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu_1 \neq \mu_2$

ধরলাম ওষুধ A-র ক্ষেত্রে বাড়তি ঘুমের পরিমাণ x_1 একটি নর্ম্যাল চল এবং ওষুধ B-র ক্ষেত্রে বাড়তি ঘুমের পরিমাণ x_2ও একটি নর্ম্যাল চল।

এখন

$$\bar{x}_1 = \frac{18.4}{13} = 1.4154$$

$$\bar{x}_2 = \frac{15.9}{12} = 1.3250$$

$$s_1'^2 = \frac{5890 - 13(1.4154)^2}{12} = 4.8866$$

$$s_2'^2 = \frac{4621 - 12(1.3250)^2}{11} = 4.1818$$

$$s'^2 = \frac{12 \times 4.8866 + 11 \times 4.1818}{23} = 4.5495$$

সুতরাং $s_1' = 2.2107$, $s_2' = 2.0450$ এবং $s' = 2.1330$

প্রথম মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$t = \frac{1.4154\sqrt{13}}{2.2107} = 2.308^*$$

12 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{.05} = 1.782$ এবং $t_{.01} = 2.681$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রয় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। এই

সংশয় মাত্রায়মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ ওষুধ A ঘুম বাড়ানোর বিষয়ে কার্যকর বলে মনে হয়। 1% সংশয়মাত্রায় অবশ্য এ মন্তব্য ঠিক নয়, এই সংশয়- মাত্রায় ওষুধ A-কে কার্যকর বলা সঙ্গত হবে না।

দ্বিতীয় মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

$$t = \frac{1{\cdot}3250\sqrt{12}}{2{\cdot}0450} = 2{\cdot}244^*$$

11 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{\cdot05} = 1{\cdot}796$ এবং $t_{\cdot01} = 2{\cdot}718$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিতমান সংশয়াত্মক। এই সংশয়মাত্রায় এবারেও মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয় অর্থাৎ ওষুধ B-ও ঘুম বাড়ানোর বিষয়ে কার্যকর বলে মনে হয়। পূর্বের মতো 1% সংশয়মাত্রায় অবশ্য এ মন্তব্য ঠিক নয়। এই সংশয়মাত্রায় ওষুধ B-কে কার্যকর বলা সঙ্গত হবে না।

তৃতীয় মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী,

$$|t| = \frac{1{\cdot}4154 - 1{\cdot}3250}{2{\cdot}1330\sqrt{\frac{1}{13} - \frac{1}{12}}} = 0{\cdot}106$$

23 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{\cdot025} = 2{\cdot}069$। সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ ওষুধ A ও ওষুধ B-র কার্যকলাপের মধ্যে কোন পার্থক্য আছে বলে মনে হয় না।

প্রথম ক্ষেত্রে μ_1-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$\bar{x}_1 \mp \frac{s'_1}{\sqrt{15}}\, t_{\cdot025,\,12}$$

অর্থাৎ 0·0791 ও 2·7517

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে μ_2-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$\bar{x}_2 \mp \frac{s'_2}{\sqrt{12}}\, t_{\cdot025,\,11}$$

অর্থাৎ 0·0256 ও 2·6244

তৃতীয় ক্ষেত্রে $(\mu_1 - \mu_2)$-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$(\bar{x}_1 - x_2) \mp s'\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{12}}\, t_{\cdot025,\,23}$$

অর্থাৎ $-1{\cdot}6761$ ও 1·8569.

14·8·4 এক গুচ্ছ বিজলীবাতি (A) থেকে পরস্পর নিরপেক্ষ 12টি বিজলী

বাতির একটি সমসম্ভব নমুনা নিয়ে তাদের আয়ু পরীক্ষা ক'রে রাশিতথ্য নীচে দেওয়া হ'ল। এই জীবনসীমার প্রমাণ বিচ্যুতি 80 ঘণ্টার চেয়ে বেশী বলে মনে হয় কি ?

অপর একগুচ্ছ বিজলী বাতি (B) থেকেও ঐ ভাবে 9টি বিজলী বাতি পরীক্ষা করা হ'ল এবং তাদের জীবন সীমার রাশিতথ্যও নীচে দেওয়া হ'ল। দ্বিতীয় গুচ্ছ বিজলী বাতির জীবন সীমার প্রমাণ বিচ্যুতি প্রথম গুচ্ছ বিজলী বাতির জীবন সীমার প্রমাণ বিচ্যুতির চেয়ে ছোট ধরা যায় কি ?

যাই হোক না কেন দ্বিতীয় গুচ্ছ বিজলী বাতির জীবন সীমার প্রমাণ বিচ্যুতির 95% আস্থা অন্তর নির্দেশ কর। প্রথম ও দ্বিতীয় দুই প্রকার বাতির প্রমাণ বিচ্যুতির অনুপাতেরও 95% আস্থা সীমা নির্দেশ কর।

জীবন সীমা (ঘণ্টায়)

গুচ্ছ A 802 959 1022 1040 733 897 989 739 845 937 1050 1121

গুচ্ছ B 839 961 896 994 950 783 867 799 989

ধরলাম দুইটি ক্ষেত্রে বিজলী বাতির জীবন সীমা, যথাক্রমে x_1 ও x_2, দুটি নর্ম্যাল চল। x_1 ও x_2-এর পূর্ণকে প্রমাণ বিচ্যুতি যথাক্রমে যদি σ_1 ও σ_2 হয়, তবে নীচের প্রকল্পগুলি বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = 80$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1 > 80$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1 > \sigma_2$

ধরা হয়েছে দুই গুচ্ছ বিজলী বাতি পরস্পর নিরপেক্ষ।

এখন $n_1 = 12$ $\qquad n_2 = 9$

$$\bar{x}_1 = 927{\cdot}8333 \qquad \bar{x}_2 = 897{\cdot}5555$$

$$s'^2_1 = 15977{\cdot}7354 \qquad s'^2_2 = 6455{\cdot}6448$$

$$s'_1 = 126{\cdot}4041 \qquad s'_2 = 80{\cdot}3469$$

প্রথম মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$\chi^2 = \frac{11 \times 15977{\cdot}7354}{6400} = 27{\cdot}4617^{**}$$

11 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $\chi^2_{.05} = 19{\cdot}6751$ এবং $\chi^2_{.01} = 24{\cdot}7250$

সুতরাং 5% ও 1% উভয় সংশয়মাত্রাতে χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। সুতরাং এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয় অর্থাৎ A গুচ্ছের বিজলী বাতির জীবন সীমার প্রমাণ বিচ্যুতি 80 ঘণ্টার বেশী বলেই মনে হয়।

আবার, দ্বিতীয় মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$F=\frac{15977\cdot7354}{6455\cdot6448}=2\cdot475$$

11 ও 8 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $F_{.05}=3\cdot28$ ও $3\cdot35$-এর মধ্যে পড়ে। সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় F-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। সুতরাং এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ B গুচ্ছের বিজলী বাতির জীবন সীমার প্রমাণ বিচ্যুতি A গুচ্ছের বিজলী বাতির জীবনসীমার প্রমাণ বিচ্যুতির চেয়ে ছোট মনে করবার কারণ নেই।

B গুচ্ছের বিজলী বাতির জীবনসীমার প্রমাণ বিচ্যুতির অর্থাৎ σ_2-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$\sqrt{\frac{8s'^2_2}{\chi^2_{.025,\,8}}} \text{ ও } \sqrt{\frac{8s'^2_2}{\chi^2_{.975,\,8}}}$$

অর্থাৎ 54·2708 ও 153·9263

σ_1/σ_2-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$\frac{s'_1/s'_2}{\sqrt{F_{.025,\,11,\,8}}} \text{ ও } \frac{s'_1}{s'_2}\sqrt{F_{.025,\,8,\,11}}$$

অর্থাৎ 0·7635 ও 3·0097

(11 ও 8 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় F-সারণীতে নেই, কিন্তু 10 ও 8 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় এবং 12 ও 8 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় আছে। তাই প্রথম স্বাতন্ত্র্যমাত্রার অন্যোন্যক $\frac{1}{10}$ ও $\frac{1}{12}$-কে অনপেক্ষ ধ'রে $\frac{1}{11}$-এর জন্য অন্তঃপ্রক্ষেপণ করা হয়েছে।)

14.8.5 পরস্পর নিরপেক্ষ 9 জন শিশুর এক সমসম্ভব নমুনায় তাদের জন্মের সময়ে ও 1 মাস পরে ওজন নীচের তালিকায় দেওয়া হ'ল।

ওজন (কি. গ্রা.)

শিশু	জন্মের সময়ে	1 মাস পরে
1	4·47	6·14
2	2·97	4·72
3	3·86	5·64
4	2·90	3·74
5	3·18	3·86
6	3·79	5·20
7	3·14	4·04
8	4·97	6·62
9	4·26	6·06

(A) পরীক্ষা ক'রে দেখ

(i) 1 মাসে ওজনের যে গড় বৃদ্ধি হয় তা জন্মের সময়ে যে ওজন তার $\frac{1}{3}$ অংশ কি না।

(ii) ওজনের ভেদমান 1 মাস পরে বৃদ্ধি পায় কি না।

(B) এক মাসে গড় বর্ধিত ওজনের 95% আস্থা অন্তর নির্দেশ কর।

শিশুর জন্মের সময়ের ওজনকে x ও 1 মাস পরে ওজনকে y ধরা হ'ল। আরও ধরা হল x ও y যৌথভাবে দ্বিচল নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে। পূর্ণকে x ও y-এর গড় যদি μ_x ও μ_y হয় এবং ভেদমান যদি σ_x^2 ও σ_y^2 হয় তবে নীচের প্রকল্প দুটি বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_y - \mu_x = \frac{1}{3}\mu_x$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu_y - \mu_x \neq \frac{1}{3}\mu_x$

অর্থাৎ $\frac{\mu_y}{\mu_x} = 1{\cdot}3333$ অর্থাৎ $\frac{\mu_y}{\mu_x} \neq 1{\cdot}3333$

(ii) মুখ্য প্রকল্প : $H_0 : \sigma_y^2 = \sigma_x^2$, বৈকল্পিক প্রকল্প : $\sigma_y^2 > \sigma_x^2$

প্রথম ক্ষেত্রে ধরলাম $v = y - 1{\cdot}3333x$

v-র মানগুলি যথাক্রমে $-0{\cdot}2198$, $0{\cdot}7601$, $0{\cdot}4935$, $-0{\cdot}1266$, $-0{\cdot}3799$, $0{\cdot}1468$, $-0{\cdot}1466$, $-0{\cdot}0065$ ও $0{\cdot}3801$

$$\bar{v} = 0{\cdot}1001$$

$$s'^2_v = 0{\cdot}1409$$

সুতরাং $$s'_v = 0{\cdot}3754$$

প্রথম মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$|t| = \frac{0{\cdot}1001\sqrt{9}}{0{\cdot}3754} = 0{\cdot}800$$

8 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{\cdot 025} = 2{\cdot}306$.

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় t-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিতমান সংশয়াত্মক নয়।

সুতরাং এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য, অর্থাৎ 1 মাসে গড় বর্ধিত ওজন জন্মের সময়ের ওজনের $\frac{1}{3}$ অংশ ধরা যায়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ধরলাম

$$y + x = u'$$

$$y - x = v'$$

যেহেতু $\text{cov}(u', v') = \sigma_y^2 - \sigma_x^2$, তাই আমরা নিম্নলিখিত প্রকল্প বিচার করতে পারি।

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho_{u'v'} = 0$

বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \rho_{u'v'} > 0$

u'-এর মানগুলি যথাক্রমে 10·91, 7·69, 9·50, 6·64, 7·04, 8·99, 7·18, 11·59 ও 10·32

v'-এর মানগুলি যথাক্রমে 1·37, 1·75, 1·78, 0·84, 0·68, 1·41, 0·90, 1·65 ও 1·80

$$\bar{u}' = 8{\cdot}8733 \qquad \bar{v}' = 1{\cdot}3533$$

$$s'^2_{u'} = 26{\cdot}6489 \qquad s'^2_{v'} = 1{\cdot}5538$$

$$s'_{u'} = 5{\cdot}1624 \qquad s'_{v'} = 1{\cdot}2466$$

$$\text{cov}(u', v') = 0{\cdot}5553$$

$$r_{u'v'} = 0{\cdot}0863$$

দ্বিতীয় মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$t = \frac{0{\cdot}0863\sqrt{7}}{\sqrt{1 - 0{\cdot}0863^2}} = 0{\cdot}229$$

7 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{\cdot05} = 1{\cdot}895$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। সুতরাং এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য, অর্থাৎ জন্মের সময়ের চেয়ে 1 মাস পরে ভেদমান বেড়ে যাওয়ার কোন আভাস পাওয়া যায় না।

$(\mu_y - \mu_x)$-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$\bar{v}' \mp \frac{s_{v'}}{\sqrt{n}} t_{\cdot025,\, 8}$$

অর্থাৎ 0·3951 ও 2·3115

সুতরাং $(\mu_y - \mu_x)$-এর 95% আস্থা অন্তর 0·3951 থেকে 2·3115 পর্যন্ত।

14.8.6 ধাতুর বল তৈরি করার একটি কারখানায় এ যাবৎ যে বল তৈরি হয়ে আসছিল তার গড় ওজন ছিল 10 গ্রাম ও প্রমাণ বিচ্যুতি ছিল 1 গ্রাম। এখন সন্দেহ হচ্ছে যে প্রমাণ বিচ্যুতি ঠিক থাকলেও গড় কিছু হ্রাস পেয়েছে।

এটি পরীক্ষা করার উদ্দেশ্যে বর্তমানে তৈরি মাল থেকে পরস্পর নিরপেক্ষভাবে 15টি বলের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল। অবেক্ষণগুলি যথাক্রমে (গ্রামে)

9·2, 10·3, 8·7, 10·0, 10·1, 9·1, 8·6, 9·0, 8·9, 8·8, 8·6, 9·0, 9·8, 8·8 ও 8·6.

যা সন্দেহ করা হয়েছে সে সম্বন্ধে তোমার কী অভিমত ?

ঐরূপ অপর একটি কারখানায় যে বল তৈরি হচ্ছিল তার গড় ছিল 11 গ্রাম ও প্রমাণ বিচ্যুতি ছিল 0·9 গ্রাম। ওখানেও ঐ একই সন্দেহ করা হচ্ছে। সেখানে নিরপেক্ষভাবে 10টি বলের এক সমসম্ভব নমুনায় বলগুলির ওজন পাওয়া গেল (গ্রামে)

8·0, 9·8, 10·2, 11·0, 8·7, 11·1, 9·8, 10·5, 11·0, 10·8.

এখানেও তোমার কী অভিমত ?

সন্দেহ যাই হোক বর্তমানে দুই গড়ের পার্থক্যের 95% ও 99% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

ধরলাম প্রথম কারখানায়, বলের ওজন x_1 একটি নর্ম্যাল চল যার গড় μ_1 এবং দ্বিতীয় কারখানায় বলের ওজন x_2 একটি নর্ম্যাল চল যার গড় μ_2। নীচের প্রকল্পদুটি বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_1 = 10$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_0 : \mu_1 < 10$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_2 = 11$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_0 : \mu_2 < 11$

প্রথম ক্ষেত্রে $\bar{x}_1 = 9{\cdot}17, \sigma_1 = 10, n_1 = 15.$

মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$\xi - \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n_1}}$$

$$= \frac{(9{\cdot}17 - 10)\sqrt{15}}{1} = -3{\cdot}215^{**}$$

প্রমাণ নর্ম্যাল চল ξ-এর 5% অধঃবিন্দু $-1{\cdot}645$ এবং 1% অধঃবিন্দু $-2{\cdot}330$। সুতরাং 1% সংশয়মাত্রাতেও ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয় অর্থাৎ পূর্বের তুলনায় বলের গড় ওজন পরে হ্রাস পেয়েছে বলেই মনে হয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\bar{x}_2 = 10{\cdot}09, \sigma_2 = 0{\cdot}9, n_2 = 10$

মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$\xi = \frac{\bar{x}_2 - \mu_2}{\sigma_2/\sqrt{n_2}}$$

$$= \frac{(10{\cdot}09 - 11)\sqrt{10}}{{\cdot}9} = -3{\cdot}197^{**}$$

পূর্বের মতো এখানেও 1% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। সুতরাং এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ এখানেও পূর্বের তুলনায় পরে গড় হ্রাস পেয়েছে বলে মনে হয়।

$(\mu_2 - \mu_1)$-এর 95% আস্থা সীমাদ্বয়

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \mp \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \times \xi_{.025}$$

অর্থাৎ, 0·1668 ও 1·6732

আবার $(\mu_2 - \mu_1)$-এর 99% আস্থা সীমাদ্বয়

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \mp \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \times \xi_{.005}$$

অর্থাৎ −0·0715 ও 1·9115

তাই $(\mu_2 - \mu_1)$-এর 95% আস্থা অন্তর 0·1668 থেকে 1·6732 পর্যন্ত এবং 99% আস্থা অন্তর −0·0715 থেকে 1·9115 পর্যন্ত।

14.8.7 x ও y দুইটি চলের উপরে নমুনালব্ধ 20 জোড়া অবেক্ষণ (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \cdots, 20)$ থেকে নীচের বিষয়গুলি জানা গেল।

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 186{\cdot}3, \sum_{i=1}^{20} y_i = 21{\cdot}9, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 215{\cdot}4$$

$$\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 86{\cdot}9 \text{ এবং, } \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 106{\cdot}4$$

x-এর উপর y-এর সরল নির্ভরণ বের কর। পূর্ণকের নির্ভরণ সমীকরণ যদি $\eta_x = \alpha + \beta x$ হয় তবে নিম্নলিখিত প্রকল্প বিচার কর।

(i) $\alpha = 0$, (ii) $\beta = 1$

x যখন 10 তখন y-এর শর্তাধীন বিন্দু প্রাক্কলনী মাপ ও তার 95% আস্থা অন্তর নিরূপণ কর।

ধরা যাক সম্ভাবনা নিরপেক্ষ চল x-এর উপর নির্ভরশীল চল y-এর শর্তাধীন বিভাজন নর্ম্যাল ও $E(y) = \eta_x = \alpha + \beta x$.

আরও ধরা যাক (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ ও সমসম্ভব এবং নমুনাতে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ

$$Y = a + bx.$$

এখন নীচের প্রকল্পদুটি বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \alpha = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \alpha \neq 0$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \beta = 1$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \beta \neq 1$

এখানে $n = 20$

$$\bar{x} = 9{\cdot}310, \quad \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 215{\cdot}4, \quad \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 106{\cdot}4$$

$$\bar{y} = 1{\cdot}095, \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 86{\cdot}9$$

সুতরাং x-এর উপর y-এর নির্ভরণাঙ্ক $b = \dfrac{106{\cdot}4}{215{\cdot}4} = 0{\cdot}4960.$

তাই x-এর উপরে y-এর নির্ভরণ

$$Y - \bar{y} = b(X - \bar{x})$$

অর্থাৎ, $Y - 1{\cdot}095 = 0{\cdot}4960(X - 9{\cdot}310)$

বা, $Y = -3{\cdot}5228 + 0{\cdot}4960X$

$$s'^2 = \left[\sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 - b\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right] \div 18$$

$$= (86{\cdot}9 - 0{\cdot}4960 \times 106{\cdot}4) \div 18$$

$$= 1{\cdot}8959$$

$\therefore \quad s' = 1{\cdot}3770.$

প্রথম ক্ষেত্রে

মুখ্য প্রকল্পানুসারে

$$|t| = \frac{|a - 0|}{s'\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}}}$$

$$\frac{3.5228}{1.3770\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{9.310^2}{215.4}}}$$

$$= 3.804^{**}$$

18 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{.025} = 2.101$ এবং $t_{.005} = 2.878$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ $a = 0$ বলে ধরা সঙ্গত নয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$|t| = \frac{|b-1|}{s'\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}}}$$

$$= \frac{|0.4960-1|}{1.3770\sqrt{\frac{1}{215.4}}}$$

$$= 5.373^{**}$$

পূর্বের ন্যায় 1% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ $\beta = 1$ বলে ধরা সমীচীন নয়।

x-এর উপরে y-এর নির্ভরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে x যখন 10 তখন

$$Y = -3.5228 + 4.9600$$

$$= 1.4372$$

সুতরাং η_x-এর শর্তাধীন বিন্দু প্রাক্কলনী মাপ 1.4372 এবং 95% আস্থা সীমাদ্বয়,

$$Y \mp s'\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}}\; t_{.025,\,18}$$

অর্থাৎ, $1.4372 \mp 1.3770\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{(10-9.310)^2}{215.4}} \times 2.101$

বা, 0.7761 ও 2.0983

সুতরাং η_x-এর 95% আস্থা অন্তর 0.7761 থেকে 2.0983 পর্যন্ত।

14.8.8 নমুনালব্ধ 28 জন ছাত্রের A, B ও C তিনটি বিষয়ে পরীক্ষার নম্বর থেকে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল

$$r_{AB} = 0{\cdot}63,\ r_{AC} = 0{\cdot}72,\ r_{BC} = 0{\cdot}80$$

অনুমান করা যাচ্ছে A ও B বিষয় দুটিতে ছাত্রদের কৃতিত্বের যে সংশ্রব আছে বলে মনে হয় তা মোটামুটি A ও B উভয় বিষয়ের উপরে C-এর প্রভাবের জন্যই।

এ বিষয়ে তোমার মন্তব্য লেখ।

ধরলাম A, B ও C এই তিন বিষয়ের পরীক্ষার নম্বর যৌথভাবে ত্রিচল নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে। আরও ধরলাম যে নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ সমসম্ভব।

তাহলে আমাদের পূর্ণকে আংশিক সহগাঙ্ক $\rho_{AB.C}$-এর সম্বন্ধে নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho_{AB.C} = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_0 : \rho_{AB.C} \neq 0$

$$r_{AB.C} = \frac{r_{AB} - r_{AC} r_{BC}}{\sqrt{(1 - r^2_{AC})(1 - r^2_{BC})}}$$

$$= \frac{0{\cdot}63 - 0{\cdot}72 \times 0{\cdot}80}{\sqrt{(1 - 0{\cdot}72^2)(1 - 0{\cdot}80^2)}} = 0{\cdot}1296$$

মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$|t| = \frac{|r_{AB.C}|\sqrt{n-3}}{\sqrt{1 - r^2_{AB.C}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}1296\sqrt{25}}{\sqrt{1 - 0{\cdot}1296^2}} = 0{\cdot}653$$

25 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $t_{.025} = 2{\cdot}060$.

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় t-র নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ A ও B-এর সহগতি প্রধানতঃ উভয়ের উপরে C-এর প্রভাবের জন্যই—এরূপ বলা চলে।

14.8.9 ধর x_1 = শস্যের পরিমাণ (কি. গ্রা.)

x_2 = বৃষ্টিপাত (সে. মি.)

x_3 = তাপমাত্রা (সেন্টিগ্রেড)

20 আয়তনের নমুনা থেকে পাওয়া গেল

$$r_{12}=0{\cdot}80,\ r_{13}=-0{\cdot}40,\ r_{23}=-0{\cdot}56$$

x_2 ও x_3-এর উপরে x_1-এর বহুল সহগাঙ্কের তাৎপর্য নির্ধারণ কর।

ধরলাম x_1, x_2 ও x_3 এই তিনটি চলের যৌথ বিভাজন ত্রিচল নর্ম্যাল। আরও ধরলাম যে নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ সমসম্ভব। তাহলে আমাদের পূর্ণকে বহুল সহগাঙ্ক $\rho_{1\cdot23}$-এর সম্বন্ধে নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প $H_0:\ \rho_{1\cdot23}=0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H:\ \rho_{1\cdot23}>0$

$$R=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}=0{\cdot}2248$$

$$R_{11}=0{\cdot}6864$$

সুতরাং $r_{1\cdot23}{}^2=1-R/R_{11}$

$$=1-\frac{0{\cdot}2248}{0{\cdot}6864}$$

$$=0{\cdot}6725$$

মুখ্য প্রকল্পানুসারে,

$$F=\frac{r_{1\cdot23}{}^2\div(p-1)}{(1-r_{1\cdot23}{}^2)\div(n-p)}$$

$$=\frac{0{\cdot}6725\div2}{0{\cdot}3275\div17}=17{\cdot}422^{**}$$

2 ও 17 স্বাতন্ত্র্যমাত্রায় $F_{\cdot05}=3{\cdot}59$ এবং $F_{\cdot01}=6{\cdot}11$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রাতেও F-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক।

তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ x_2 ও x_3-এর উপরে x_1-এর বহুল সহগাঙ্ক 0 বলে মনে করার কারণ নেই।

14.8.10 ছোট ছোট লোহার বল তৈরি করার 4টি যন্ত্রের উৎপাদন থেকে

পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা নিয়ে নীচের সারণীভুক্ত বলের ওজন (গ্রাম) পাওয়া গেল।

মেসিন নম্বর 1	মেসিন নম্বর 2	মেসিন নম্বর 3	মেসিন নম্বর 4
81·6	82·7	83·2	80·6
82·8	82·7	83·0	82·8
82·3	83·2	83·3	82·1
81·3	81·2	82·0	82·0
83·5		82·6	81·2
		83·1	

উপরের রাশিতথ্য বিশ্লেষণ ক'রে তোমার অভিমত প্রকাশ কর।

ধরলাম প্রতি যন্ত্রে প্রস্তুত দ্রব্যের ওজনের বিভাজন নর্ম্যাল এবং তাদের ভেদমান সমান। আরও ধরলাম যে প্রতি নমুনার ক্ষেত্রে অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ সমসম্ভব। ধরলাম i-তম যন্ত্রের ক্ষেত্রে নমুনার j-তম অবেক্ষণ x_{ij}, $i=1, 2, 3, 4;\ j=1, 2, \ldots, n_i\ (n_1=5,\ n_2=4,\ n_3=6,\ n_4=5)$

আরও ধরলাম i-তম যন্ত্র থেকে উৎপন্ন যাবতীয় বলের গড় ওজন μ_i, $i=1, 2, 3, 4$

তাহলে নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 :\ (\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4)$$

বৈকল্পিক প্রকল্প $H(\mu_1, \mu_2, \mu_3$ ও μ_4 সকলে সমান নয়)

প্রতি অবেক্ষণ থেকে 80 বাদ দেওয়া হ'ল। তাতে প্রভেদ বিশ্লেষণ F-এর মানের কোন পরিবর্তন হবে না। ধরলাম $y_{ij}=x_{ij}-80$

এখন, $n=5+4+6+5=20$

$$T_1=\sum_{j=1}^{5} y_{1j}=11{\cdot}5$$

$$T_2=\sum_{j=1}^{4} y_{2j}=9{\cdot}8$$

$$T_3=\sum_{j=1}^{6} y_{3j}=17{\cdot}2$$

$$T_4=\sum_{j=1}^{5} y_{4j}=9{\cdot}5$$

$$T = \sum_{i=1}^{4} T_i = 48\text{'}1$$

শুদ্ধি উপকরণ $= \frac{T^2}{n} = \frac{48^2}{20} = 115\text{·}20$

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} y^2_{ij} = 128\text{·}44$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{T_i^2}{n_i} = \frac{11\text{·}5^2}{5} + \frac{9\text{·}8^2}{4} + \frac{17\text{·}2^2}{6} + \frac{9\text{·}5^2}{5} = 117\text{·}82$$

সুতরাং সমগ্র বর্গসমষ্টি $= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 -$ শুদ্ধি উপকরণ

$= 128\text{·}44 - 115\text{·}20 = 13\text{·}24$

আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গসমষ্টি $= \sum_{i=1}^{4} \frac{T_i^2}{n_i} -$ শুদ্ধি উপকরণ

$= 117\text{·}82 - 115\text{·}20 = 2\text{·}62$

অন্তঃগোষ্ঠীক বর্গসমষ্টি = সমগ্র বর্গসমষ্টি − আন্তঃগোষ্ঠীক বর্গসমষ্টি

$= 13\text{·}24 - 2\text{·}62 = 10\text{·}62$

প্রভেদ বিশ্লেষণ সারণী।

কারণ	স্বাতন্ত্র্যমাত্রা	বর্গসমষ্টি	বর্গ গড়	F	$F_5\%$
আন্তঃগোষ্ঠীক	3	2·62	0·873	1·315	3·24
অন্তঃগোষ্ঠীক	16	10·62	0·664		
সমগ্র	19	13·24			

5% সংশয়মাত্রায় F-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। সুতরাং এই

সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্পটি গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ বলের ওজনের দিক থেকে যন্ত্র চারিটির মধ্যে কোন পার্থক্য আছে বলে মনে হয় না।

14.8.11 ধর x একটি চল যা নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে এবং যার প্রত্যাশা 68 ও প্রমাণ বিচুতি 2·5। নমুনাজ গড় ও পূর্ণক গড়ের প্রভেদ পূর্ণক গড়ের তুলনায় 1%-এর বেশী হবার সম্ভাবনা যেন $\frac{1}{500}$ হয়—এটাই অভিপ্রেত। এজন্য নমুনার আয়তন কমপক্ষে কত হওয়া উচিত?

ধরলাম নমুনার আয়তন n এবং নমুনাজ গড় $\bar{x}$.

প্রশ্নানুসারে, $P[|\bar{x}-68|>0·68]=0·002$

অর্থাৎ $P\left[\left|\frac{\bar{x}-68}{2·5/\sqrt{n}}\right|>\frac{0·68}{2·5/\sqrt{n}}\right]=0·002$

অর্থাৎ $P[|\xi|>0·272\sqrt{n}]=0·002$

যেখানে ξ-এর বিভাজন $N(0, 1)$

এখন নর্ম্যাল সম্ভাবনা সমাকলন সারণী থেকে

$$P[|\xi|>3·09]=0·002$$

সুতরাং $0·272\sqrt{n}=3·09$

অর্থাৎ $n=129$

সুতরাং নমুনার আয়তন কমপক্ষে 129 হতে হবে।

অনুশীলনী

14·1 বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলনের মধ্যে পার্থক্য বুঝিয়ে লেখ।

14·2 বাঞ্ছিত প্রাক্কলকের বিভিন্ন ধর্মের বিষয় আলোচনা কর। উদাহরণ দ্বারা বুঝিয়ে লেখ।

14·3 সংজ্ঞা লেখ: মুখ্য ও বৈকল্পিক প্রকল্প, প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকারের ভ্রান্তি এবং বর্জনাঞ্চল ও সংশয়মাত্রা।

14·4 সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন বিচার ও সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন পক্ষপাতশূন্য বিচার কাদের বলে?

14·5 অন্তর প্রাক্কলন ও প্রকল্পবিচার পদ্ধতিদ্বয় একটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝিয়ে লেখ।

14·6 একধারা শ্রেণীবিন্যাসে প্রভেদ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়াটি বুঝিয়ে লেখ।

14.7 গরিষ্ঠ আশাংসা প্রাক্কলন পদ্ধতির বিবরণ দাও। ধর x-এর বিভাজন

$$dF = \frac{x^{p-1}e^{-\theta x}}{\lfloor p \, \theta^p} \quad 0 < x < \infty$$

p দেওয়া থাকলে, পরস্পর নিরপেক্ষ অবক্ষেপণযুক্ত n মাত্রার সমসম্ভব নমুনার সাহায্যে θ-র গরিষ্ঠ আশাংসা প্রাক্কলক বের কর।

14.8 ধর $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যাদের প্রত্যেকের ঘনত্ব অপেক্ষক $\theta e^{-\theta x}$, $(0 < x < \infty)$ যেখানে $\theta \, (0 < \theta < \infty)$ অজানা।

দেখাও যে $\sum_{i=1}^{n} x_i$ নমুনাঙ্কটি θ-র একটি পর্যাপ্ত নমুনাঙ্ক।

14.9 এক ব্যক্তি A একটি মুদ্রাকে n_1 বার উপরদিকে নিক্ষেপ ক'রে r_1 বার অশোকস্তম্ভ চিহ্নিত মুখটি পেল, অপর এক ব্যক্তি B ঐ মুদ্রাকে n_2 বার উপরদিকে নিক্ষেপ ক'রে r_2 বার ঐ মুখটি পেল। মুদ্রাটিকে এরূপ একবার উপরদিকে নিক্ষেপ করলে ঐ অশোকস্তম্ভ চিহ্নিত মুখটি পাবার সম্ভাবনার গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক বের কর।

14.10 ধর $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পূর্ণকাঙ্ক λ সম্বলিত পোয়াসঁ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। দেখাও যে,

$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/n$ পূর্ণকাঙ্ক λ-র একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক। একে প্রতিদ্বন্দ্বী প্রাক্কলক $\bar{x}$-এর সঙ্গে তুলনা কর।

14.11 ধর একটি নর্ম্যাল পূর্ণক আছে যার ভেদমান 1। ধর সেখান থেকে একটি সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে যার অবেক্ষণগুলি x_1, x_2, x_3 ও x_4 এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ।

ধর মুখ্য প্রকল্প H_0 : পূর্ণক মধ্যমমান $= 0$

এবং বৈকল্পিক প্রকল্প H : পূর্ণক মধ্যমমান $\neq 0$

নমুনাজ গড়ের উপর নির্ভর ক'রে প্রথম প্রকার ভ্রান্তির পরিমাণ $\frac{1}{8}$ হলে সম-আয়তনের উভয় পুচ্ছান্ত বর্জনাঞ্চল নির্ণয় কর। যখন পূর্ণক মধ্যমা 2 হয় তখন ঐ বিচারের দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। এই বিচারে শক্তির পরিমাণই বা কত?

14.12 ভেদমান 1 বিশিষ্ট কোন নর্ম্যাল পূর্ণকের গড় 0 কিনা তা ঐ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত n আয়তনের সমসম্ভব নমুনার সাহায্যে বিচার করার জন্য নিম্নলিখিত নিয়ম অনুসরণ করা হ'ল।

নমুনাতে যে কয়টি ঋণাত্মক সংখ্যা আছে তা যদি কোন নির্দিষ্ট পূর্ণ সংখ্যা d-র চেয়ে বেশী হয় তবে মুখ্য প্রকল্পটি বর্জন করা হবে, নতুবা একে গ্রহণ করা হবে। এই পদ্ধতিতে বিচার করায় দুই প্রকার ভ্রান্তি কেমন হবে, দেখাও।

14.13 পূর্ণকের পরিচয় যদি

$$dF = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(y-\beta x)^2}\, dy$$

হয় এবং (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ যদি ঐ পূর্ণক থেকে পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা হয়, যেখানে অবশ্য $x_1, x_2, \ldots x_n$ ধ্রুবকরূপে গণ্য, তবে β ও σ^2-এর গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক বের কর। প্রমাণ কর যে ঐ প্রাক্কলকদ্বয় পরস্পর নিরপেক্ষ।

14.14 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ যদি গড় 0 ও ভেদমান σ^2 সমন্বিত নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে পরস্পর নিরপেক্ষ সমসম্ভব অবেক্ষণ হয় এবং $y_1, y_2, \ldots, y_s$ যদি গড় 0 ও ভেদমান $\theta\sigma^2$ জনিত নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে পরস্পর নিরপেক্ষ সমসম্ভব অবেক্ষণ হয়, তবে θ-র গরিষ্ঠ আশাংসা প্রাক্কলক বের কর এবং এর নমুনাজ বিভাজন নির্ণয় কর।

14.15 ধর প্রত্যেক x_i-এর বিভাজন $N(m, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ এবং তারা পরস্পর নিরপেক্ষ। যদি

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\bar{x}_w$ নমুনাঙ্কটি m-এর জন্য পর্যাপ্ত।

14.16 একটি নর্ম্যাল পূর্ণকের গড় শূন্য কি না বিচার করতে তুমি যে নমুনাঙ্ক ব্যবহার করবে, তার নমুনাজ বিভাজন নির্ণয় কর; ধর পূর্ণকের ভেদমান σ^2 (*i*) জানা আছে, (*ii*) জানা নেই।

14.17 একটি নর্ম্যাল পূর্ণকের ভেদমান 1 কিনা বিচার করতে তুমি যে নমুনাঙ্ক ব্যবহার করবে তার নমুনাজ বিভাজন নির্ণয় কর; ধর পূর্ণকের গড় m (*i*) জানা আছে, (*ii*) জানা নেই।

14.18 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের গড় সমান কিনা বিচার করতে তুমি যে নমুনাঙ্ক ব্যবহার করবে তার নমুনাজ বিভাজন নির্ণয় কর; ধর (*i*) পূর্ণকের ভেদমান $\sigma_1{}^2$ ও $\sigma_2{}^2$ জানা আছে, (*ii*) পূর্ণকের ভেদমান সমান, কিন্তু তা জানা নেই।

14.19 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের ভেদমান সমান কিনা বিচার করতে গিয়ে তুমি যে নমুনাঙ্ক ব্যবহার করবে তার নমুনাজ বিভাজন নির্ণয় কর; ধর পূর্ণকের গড় μ_1 ও μ_2 (*i*) জানা আছে, (*ii*) জানা নেই।

14.20 ধর T একটি নমুনাঙ্ক। আরও ধর যে এর বিভাজন নর্ম্যাল এবং গড় θ। প্রমাণ কর যে θ-কে T দিয়ে প্রাক্কলন করলে শতকরা ভুলের পরিমাণ ভেদাঙ্কের 3 গুণের বেশী হবার সম্ভাবনা খুবই কম।

14.21 ধর $\bar{x}_1$ ও $\bar{x}_2$ একই নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত দুইটি n আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনাজ গড়। n-এর মান কত হলে গড়দ্বয়ের মধ্যে পার্থক্য σ-র চেয়ে বেশী হবার সম্ভাবনা প্রায় 0·01? (σ পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি।)

14.22 একজন কারখানার মালিক দাবি করেন যে, তাঁর কারখানায় যে সমস্ত জিনিসপত্র তৈরী হয় তার 4% এর বেশী ত্রুটিপূর্ণ নয়। পরস্পর নিরপেক্ষ 25টি জিনিসের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ ক'রে তাতে 4টি ত্রুটিপূর্ণ জিনিস পাওয়া গেল।

মালিকের দাবিকে সত্য বলে গ্রহণ করা যেতে পারে কি?

14·23 কোনও একটি শহরের সম্বন্ধে পত্রিকাতে মন্তব্য করা হয়েছে যে সে শহরে যানবাহন চলাচলের বিশেষ উন্নতি হয়েছে, কারণ যেখানে অনেক বৎসর ধরে গড়ে বৎসরে 15টি দুর্ঘটনা হ'ত সেখানে গত বৎসরে মাত্র 9টি দুর্ঘটনা হয়েছে। এই মন্তব্য বিচার কর।

14.24 কোনও একটি পাত্রে প্রচুর পরিমাণে সাদা ও কাল বল মিশান আছে। সেখান থেকে 25টি বল নিয়ে দেখা গেল 11টি সাদা। একটি কাল বল তুলবার সম্ভাবনা যদি P হয়। তবে P-র গরিষ্ঠ আশাংসা প্রাক্কলক বের কর, যখন P নিম্নলিখিত মানগুলির একটিমাত্র নিতে পারে, যেমন 0·45, 0·50, 0·55, এবং 0·60।

14.25 কোন নর্ম্যাল পূর্ণকের গড় দেওয়া আছে 66·0। সেখান থেকে

পরস্পর নিরপেক্ষ 10টি অবেক্ষণের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল। তারা যথাক্রমে (ঊর্ধ্বক্রমানুসারে)

62, 63, 64, 65, 67, 67, 68, 69, 70 ও 72

পূর্ণকের গড়ের 95% ও 99% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

14.26 কলিকাতার একটি হাসপাতালে জন্মের সময় 15টি শিশুর এক সমসম্ভব নমুনা নিয়ে তাদের ওজন (গ্রামে) যা পাওয়া গেল তা নীচে দেওয়া হয়েছে।

2790, 3195, 3375, 2565, 2835, 3510, 3645, 2610, 3825, 3015, 3005, 2160, 3420, 2250 ও 3555

এ জাতীয় সমস্ত শিশুর জন্মের সময়ের ওজনের 95% ও 99% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

14.27 ছোট ছোট লৌহদণ্ড তৈরি করার এক কারখানায় নতুন এক পদ্ধতিতে লৌহদণ্ড তৈরি করা আরম্ভ হয়েছে। এখনকার উৎপাদন থেকে সমসম্ভব 12টি দণ্ডের দৈর্ঘ্য (সেন্টিমিটারে) নীচে দেওয়া হ'ল।

1·99, 2·14, 1·98, 2·07, 2·11, 2·17, 2·01, 2·02, 1·97, 2·06, 2·24 ও 2·05

এ যাবৎ লৌহদণ্ডের প্রমাণ বিচ্যুতি চলে আসছিল 0·145 সে. মি.। পরীক্ষা ক'রে দেখ নতুন পদ্ধতি অবলম্বনে কিছু ভাল হয়েছে কি ?

14.28 একটি রাসায়নিক যৌগিক পদার্থে 12·5% লৌহ আছে। দুইজন রাসায়নিক A ও B-কে ঐ পদার্থে শতকরা লৌহের অংশের পরিমাণ বের করতে বলা হ'ল। ঐ পদার্থ কিছু নিয়ে তাকে যত্ন ক'রে সমান 25 ভাগে বিভক্ত করা হ'ল। A-কে দেওয়া হ'ল 15টি ও B-কে দেওয়া হ'ল 10টি। তাঁদের নমুনালব্ধ ফল নীচে দেওয়া হ'ল :

A-র ফল			B-র ফল	
12·46	12·43	12·77	12·05	12·33
11·89	12·12	12·32	12·22	12·45
12·76	11·85	12·56	12·45	12·39
11·95	12·24	12·65	11·97	12·37
12·77	12·28	12·12	12·21	12·65

তুমি কি মনে কর যে, A ও B কারও বিশ্লেষণে প্রবণতার (bias-এর) পরিচয় পাওয়া যায় নি ? যাই হোক যদি প্রবণতা থাকেও সেটা উভয়েরই সমান কি ? তাদের ভ্রমশূন্যতা তুলনা কর।

14.29 10 জন মেয়ের সমসম্ভব নমুনা থেকে উচ্চতা (সে. মি.তে) পাওয়া গেল : 153, 156, 163, 168, 170, 170, 175, 177, 180 ও 182

6 জন ছেলের ঐরূপ একটি নমুনা থেকে উচ্চতা (সে. মি.তে) পাওয়া গেল :

158, 163, 171, 174, 179 ও 181

পূর্ণকে দুইটি গড়ের পার্থক্যের 95% আস্থা অন্তর নিরূপণ কর।

14.30 11 বৎসর—13 বৎসর বয়সের বালকদের এবং 14 বৎসর—16 বৎসর বয়সের বালকদের যথাক্রমে 10 ও 15 আয়তনের দুইটি সমসম্ভব নমুনা নিয়ে তাদের উচ্চতা (সে. মি.) থেকে প্রমাণ বিচ্যুতি বের করা হ'ল। সে দুটি প্রমাণ বিচ্যুতি যথাক্রমে 1·15 সে. মি. ও 2·36 সে. মি.।

এ থেকে কি প্রমাণ হয় যে (14—16) বৎসরের বালকদের উচ্চতায় অন্তর্নিহিত প্রভেদ (11—13) বৎসরের বালকদের উচ্চতার অন্তর্নিহিত প্রভেদের তুলনায় অধিকতর? যাই হোক দুটি প্রমাণ বিচ্যুতির অনুপাতের 95% ও 99% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

14.31 সমসম্ভব নমুনালব্ধ 16টি সাধারণ খরগোশের সম্মুখস্থ দক্ষিণ ও বাম পায়ের মাংশপেশীর ওজন (গ্রামে) নীচে দেওয়া হ'ল।

খরগোশ / পা	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
দক্ষিণ	5·0	4·8	4·3	5·1	4·1	4·0	7·1	5·9	5·8	5·3	5·3	5·9	6·5	6·3	6·8	6·2
বাম	4·9	5·0	4·8	5·3	4·4	4·8	6·9	6·8	5·2	5·5	5·5	5·4	6·8	6·8	6·6	6·8

মাংসপেশীর গড় ওজনের দিক থেকে সম্মুখস্থ পা দুটির মধ্যে তাৎপর্যপূর্ণ পার্থক্য আছে কি?

দুটি পায়ের মাংসপেশীর ওজনের ভেদমানদ্বয় সমান ধরতে পার কি?

14.32 20 জন বালকের এক সমসম্ভব নমুনায় অঙ্ক ও ভাষার ব্যুৎপত্তির মধ্যে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·42। এটা কি পূর্ণকে তাৎপর্যপূর্ণ সহগতির পরিচায়ক?

এরূপ নমুনায় সহগাঙ্কের লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর যা 5% সংশয়মাত্রায় তাৎপর্যপূর্ণ।

14.33 x ও y দুইটি চলের উপরে নিম্নলিখিত 12 জোড়া মান পাওয়া গেল :

x	10·0	8·9	9·2	7·8	10·2	9·0	8·2	9·5	10·8	11·1	11·2	12·5
y	70·9	74·0	80·6	69·4	76·0	66·4	50·9	61·9	65·2	77·2	89·6	74·2

x-এর উপরে y-এর সরল নির্ভরণ থেকে x যখন 10 তখন y-এর শর্তাধীন গড়ের বিন্দু প্রাক্কলনী মাপ ও 95% আস্থা অন্তর নিরূপণ করো। (বিনা প্রমাণে যা স্বীকার করে নিয়েছ তা লেখ)

14.34 চার ধরনের শূকর ছানার প্রতিটি থেকে সমসম্ভব নমুনা নিয়ে কিছু সময় ধ'রে একই খাবার খাওয়ান হল। নির্দিষ্ট সময় অতিবাহিত হলে তাদের প্রত্যেকের বাড়তি ওজন (গ্রামে) নীচে দেওয়া হল। নমুনাজ চারিটি গড়ের পার্থক্য কি তাৎপর্যপূর্ণ?

শূকর ছানার শ্রেণীবিভাগ

A	B	C	D
2750	6575	5125	6025
6200	7075	7200	9100
3875	5300	4050	5800
5400	7425	6000	5575

14.35 কোনও একটি মোরগমুরগী সংরক্ষণ কেন্দ্রে ডিম উৎপাদনের জন্য

চার প্রকার খাদ্যের তুলনা করতে গিয়ে রাশিতথ্যের দিক থেকে নীচের বিষয়-গুলি জানা গেল :

খাদ্যের প্রকার	1	2	3	4
মুরগীর সংখ্যা	11	12	15	12
প্রতি বৎসরে প্রতি মুরগীর গড় ডিম সংখ্যা	207	199	318	190
প্রমাণ বিচ্যুতি	14	15	16	14

(প্রমাণ বিচ্যুতি হিসাব করতে গিয়ে যে ভাজক ব্যবহার করা হয়েছে তা নমুনা আয়তনের সমান, স্বাতন্ত্র্যমাত্রার সমান নয় ।)

পরীক্ষা ক'রে দেখে মোরগ-মুরগী উৎপাদনের দিক থেকে খাদ্যগুলির মধ্যে কোনও সত্যিকারের পার্থক্য আছে কিনা।

নির্দেশিকা

1. Goon, A.M., Gupta, M.K. & Dasgupta, B. Fundamentals of Statistics, Vol. I (Chs. 15, 16). World Press, 1971.

2. Hogg, R.V. & Craig, A.T. Introduction to Mathematical Statistics (Chs. 5, 9 – 11). Macmillan, 1965.

3. Mood, A.M. & Graybill, F.A. Introduction to the Theory of Statistics (Chs. 8, 11, 12). McGraw—Hill, 1963.

15 বৃহৎ নমুনা-ভিত্তিক অনুমানে আসন্নীকরণ
(Large Sample Approximation)

15·1 ভূমিকা ঃ

পূর্বের অধ্যায়ে অনুমান তত্ত্বের অঙ্গ হিসাবে যে সমস্ত পদ্ধতির বিষয় আলোচনা করা হয়েছে তাতে নমুনার আয়তন সম্বন্ধে কোন শর্ত আরোপ করা হয় নি। যথার্থ নমুনা বিভাজন ব্যবহার ক'রে সেখানে যে সব সিদ্ধান্তে আসা গেছে সে সবই সম্ভাবনা তত্ত্বের দিক থেকে যথার্থ (exact)।

অনেক সময় অবশ্য নমুনা বৃহৎ হলে যথার্থ নমুনা বিভাজন প্রয়োগ না ক'রে আসন্ন নমুনা বিভাজনের সাহায্যে অনুমান সাধন সম্ভব। সম্ভাবনার দিক থেকে সেই অনুমানে আসন্নতার অবকাশ থাকলেও ব্যবহারিক দিক থেকে এ বিশেষ কার্যকর।

কেবল কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রেই আমাদের সংশ্লিষ্ট নমুনাঙ্কের নমুনাজ বিভাজন জানা থাকে এবং সেই সকল ক্ষেত্রেই যথার্থ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, তাই, গুরুতরভাবে সীমাবদ্ধ কয়েকটি ক্ষেত্রেই এরূপ সিদ্ধান্তে আসা যায়। বৃহৎ নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে এই অধ্যায়ে আমরা যে পদ্ধতির বিষয় আলোচনা করব তা অধিকাংশ ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য—তাই সিদ্ধান্তে কিছুটা আসন্নতা থাকলেও এর প্রয়োগক্ষেত্র অনেক বিস্তৃততর।

দেখা গেছে যে, সমসম্ভব নমুনার আয়তন যতই বৃহৎ হয় অনেক নমুনাঙ্ক বিভাজন ততই নর্ম্যাল বিভাজনের দিকে অগ্রসর হয়। অনেক ক্ষেত্রে আবার নমুনাঙ্কের সামান্য কিছু রূপান্তর ঘটালেই সেটির বিভাজন ক্রমাসন্ন নর্ম্যাল হয়। তাই বৃহৎ নমুনা-ভিত্তিক অনুমান পদ্ধতি একমাত্র নর্ম্যাল নিবেশনের উপরই নির্ভর করে। তা ছাড়া নমুনার আয়তন বৃহৎ হলে নমুনাঙ্কের প্রত্যাশা হিসাবে আসন্নভাবে অনুরূপ পূর্ণকাঙ্ককে গ্রহণ করা যায় এবং নমুনাজ বিভাজনের অনেক বৈশিষ্ট্যেরই প্রাক্কলন খুব সহজে করা যায়। এই পদ্ধতির প্রয়োগে তাই আমরা কোন পূর্ণকাঙ্কের বিন্দু প্রাক্কলন, আস্থা-অন্তর নিরূপণ বা কোন পূর্ণকাঙ্ক সম্বন্ধে প্রকল্প বিচার কার্য অতি সহজেই সমাধা করতে পারি।

15.2 সাধারণ পদ্ধতি :

ধরা যাক θ কোনও পূর্ণকের একটি পূর্ণকাঙ্ক এবং T ঐ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনার অনুরূপ (corresponding) নমুনাঙ্ক।

নমুনার আয়তন বৃহৎ হলে সাধারণতঃ T-র ক্রমাসন্ন বিভাজন হবে নর্ম্যাল এবং এর প্রত্যাশা হবে θ। ধরা যাক এর ভেদমান σ_T^2.

তাই পূর্ণকাঙ্ক θ-র পক্ষপাতশূন্য বিন্দু প্রাক্কলক হবে T.

নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক θ-র আস্থা-অন্তর নিরূপণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

ধরলাম $$\xi = \frac{T-\theta}{\sigma}$$

[এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$]

সুতরাং আস্থা অঙ্ক $100(1-\alpha)\%$ হলে θ-র অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয় যথাক্রমে $T-\xi_{\alpha/2}\sigma_T$ এবং $T+\xi_{\alpha/2}\sigma_T$

σ জানা না থাকলে এর নমুনাভিত্তিক প্রাক্কলক s_T ব্যবহার করা হবে এবং সেক্ষেত্রে ধরলাম

$$\xi = \frac{T-\theta}{s_T}$$

[এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$].

তখন এই আস্থা অঙ্কে আস্থা সীমাদ্বয় হবে

$$T-\xi_{\alpha/2}s_T \quad \text{এবং} \quad T+\xi_{\alpha/2}s_T$$

আবার নমুনার উপর ভিত্তি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক θ-র জন্য মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad \theta = \theta_0$$

বিচার করতে হলে নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

নমুনাঙ্ক $$\xi = \frac{T-\theta_0}{\sigma_T}$$

[এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$]

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে প্রমাণ নর্ম্যাল বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণপুচ্ছান্ত, বামপুচ্ছান্ত ও উভয়পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta > \theta_0$

$H: \theta < \theta_0$ ও $H: \theta \neq \theta_0$ এর বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে। σ_T জানা না থাকলে s_T ব্যবহার করা হবে এবং সেক্ষেত্রে

$$\xi = \frac{T - \theta_0}{s_T}$$

[এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$ মনে রেখে অগ্রসর হতে হবে]

এখন প্রশ্ন হচ্ছে: নমুনায়তন n-কে কত বড় হতে হবে? এর উত্তর নির্ভর করবে পূর্ণকের প্রকৃতির উপর, নমুনাঙ্কের ধর্মের উপর এবং ভ্রমশূন্যতার (বা যথার্থতার) ঈপ্সিত মাত্রার উপর। মোটামুটিভাবে বলা চলে নমুনাজ গড় বা অংশের ক্ষেত্রে n-এর 30 থেকে বড় হওয়া বাঞ্ছনীয়, নমুনাজ মধ্যমমান, ভেদমান, প্রমাণ বিচ্যুতি, অসমপক্ষতা, তীক্ষ্ণতা ইত্যাদির ক্ষেত্রে n-এর 100-র চেয়ে বড় হওয়া বাঞ্ছনীয় এবং নমুনাজ সহগাঙ্কের ক্ষেত্রে অনুরূপ পূর্ণকাঙ্ক শূন্যের নিকটবর্তী হলে $n > 100$ হলেই চলে, কিন্তু যদি অনুরূপ পূর্ণকাঙ্ক শূন্য থেকে বেশী দূরবর্তী হয়, তবে n-এর পক্ষে অনেক বৃহত্তর হওয়া বাঞ্ছনীয় (অন্ততঃ $n > 300$).

15.3 প্রমাণ ভ্রান্তি:

পূর্বে ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদে আমরা কয়েকটি নমুনাঙ্কের যথার্থ প্রমাণভ্রান্তি বের করেছি। এমন নমুনাঙ্ক আছে যাদের যথার্থ প্রমাণভ্রান্তি বের করা বেশ কষ্টসাধ্য। বৃহৎ নমুনা-ভিত্তিক অনুমান তত্ত্বের ক্ষেত্রে নমুনাঙ্কের প্রমাণ ভ্রান্তির বিশেষ প্রয়োজন থাকলেও সেটা যথার্থ না হলেও চলবে।

আসন্ন প্রমাণ ভ্রান্তি (বস্তুতঃ ভেদমান) বের করতে নীচের অনুসিদ্ধান্ত কয়েকটি বিশেষ উপযোগী।

ধরলাম T একটি নমুনাঙ্ক যার প্রত্যাশা θ ও ভেদমান σ^2, ($\sigma << \theta$, অর্থাৎ σ-কে θ-র থেকে অনেক ছোট ধরা হ'ল; কারণ সেক্ষেত্রে θ হতে T-র বিচ্যুতি θ-র তুলনায় ছোট হবে এবং সেটাই নীচের আলোচনায় প্রযোজ্য।)

ধরলাম $\quad T = \theta + \varepsilon$

সুতরাং $\quad E(\varepsilon) = 0$

ও $\quad E(\varepsilon^2) = V(\varepsilon) = \sigma^2$

অনুসিদ্ধান্ত 15.3.1

$$E\phi(T)=E\{\phi(\theta+\varepsilon)\}$$

$$=E\left\{\phi(\theta)+\varepsilon\phi'(\theta)+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi''(\theta)+\cdots\right\}$$

যেখানে $\phi'(\theta)=\left[\frac{d\phi(T)}{dT}\right]_{T=\theta}$ ইত্যাদি।

$$=\phi(\theta)+\frac{\sigma^2}{2}\phi''(\theta)+\cdot$$

(σ-র দুই ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ বর্জন ক'রে)

$$\simeq\phi(\theta)$$

সুতরাং $E\phi(T)\simeq\phi\{E(T)\}$

অনুসিদ্ধান্ত 15·3·2

$$V\phi(T)=E\{\phi(T)\}^2-E^2\{\phi(T)\}$$

$$=E\left\{\phi(\theta)+\varepsilon\phi'(\theta)+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi''(\theta)+\cdots\right\}^2$$

$$-E^2\left\{\phi(\theta)+\varepsilon\phi'(\theta)+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi''(\theta)+\cdots\right\}$$

$$=\{\phi(\theta)\}^2+\phi(\theta)\phi''(\theta)\sigma^2+\{\phi'(\theta)\}^2\sigma^2+\cdots$$

$$-\{\phi(\theta)\}^2-\phi(\theta)\phi''(\theta)\,\sigma^2-\cdots$$

$\simeq\{\phi'(\theta)\}^2\sigma^2$ (ε-র তিন ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ বর্জন ক'রে)

সুতরাং $V(\phi(T)\simeq\left[\frac{d\phi(T)}{dT}\right]^2_{T=\theta}V(T)$

অর্থাৎ $\simeq\left[\frac{d\phi(T)}{dT}\right]^2_{E}V(T)$

তারপর ধরলাম $T_1, T_2,\ldots, T_r$ কয়েকটি নমুনাঙ্ক যেখানে

$$E(T_i)=\theta_i$$

$$V(T_i)=\sigma_i^2 \qquad (\sigma_i<<\theta_i\ (i=1, 2,\ldots, r)$$

$$\text{cov}\,(T_i, T_j)=\rho_{ij}\,\sigma_i\sigma_j$$

এখন ধরলাম $T_i=\theta_i+\varepsilon_i$ ($i=1, 2,\ldots, r$)

সুতরাং

$$\left.\begin{aligned}E(\varepsilon_i)&=0\\E(\varepsilon_i^2)&=V(\varepsilon_i)=\sigma_i^2\\E(\varepsilon_i\varepsilon_j)&=\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=\rho_{ij}\,\sigma_i\sigma_j\end{aligned}\right\}\ (i\neq j=1, 2,\ldots, r)$$

অনুসিদ্ধান্ত 15.3.3

$$E\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)$$

$$= E\{\phi(\theta_1 + \varepsilon_1, \theta_2 + \varepsilon_2, \ldots, \theta_r + \varepsilon_r)\}$$

$$= E\{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \phi'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i \varepsilon_j \phi''_{ij} + \cdots\}$$

যেখানে $\phi'_i = \left[\frac{\partial \phi(T_1, T_2, \ldots T_r)}{\partial T_i}\right]_{\substack{T_1=\theta_1 \\ T_2=\theta_2 \\ \vdots \\ T_r=\theta_r}}$ ইত্যাদি $(i = 1, 2, \ldots, r)$

$$= \phi(\theta, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \phi''_{ij} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \cdots$$

(σ_i, σ_j-এর একত্রে দুই ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ বর্জন ক'রে)

$$\simeq \phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$$

সুতরাং $E\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r) \simeq \phi\{E(T_1), E(T_2), \ldots, E(T_r)\}$

অনুসিদ্ধান্ত 15.3.4

$$V\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)$$

$$= E\{\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}^2 - E^2\{\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}$$

$$= E\{\phi(\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \phi'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i \varepsilon_j \phi''_{ij} + \cdots\}^2$$

$$- E^2\{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \phi'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i \varepsilon_j \phi''_{ij} + \cdots\}$$

$$= \{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)\}^2$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{r} \phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) \phi''_{ij} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i,j=1}^{r} \phi'_i \phi'_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \cdots$$

$$-\{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)\}^2 - \sum_{i,j=1}^{r} \phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)\phi''_{ij}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j - \cdots$$

(σ_i, σ_j-এর একত্রে তিন ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ বর্জন ক'রে)

$$\simeq \sum_{i,j=1}^{r} \phi_i'\phi'_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

সুতরাং $V\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)$

$$\simeq \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)}{\partial T_i}\right]_E^2 V(T_i)$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r}\left[\frac{\partial\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)}{\partial T_i} \times \frac{\partial\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)}{\partial T_j}\right]_E \text{cov}(T_i, T_j)$$

অনুসিদ্ধান্ত 15.3.5

$$\text{cov}\,\{\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r), \psi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}$$

$$= E[\{\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}\{\psi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}]$$

$$- E\{\phi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}E\{\psi(T_1, T_2, \ldots, T_r)\}$$

$$= E[\{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\phi_i' + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i\varepsilon_j\phi''_{ij} + \cdots\}$$

$$\times \{\psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\psi'_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i\varepsilon_j\psi''_{ij} + \cdots\}]$$

$$- E\{\phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\phi'_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i\varepsilon_j\phi''_{ij} + \cdots\}$$

$$\times E\{\psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\psi'_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_i\varepsilon_j\psi''_{ij} + \cdots\}$$

$$= \phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)\psi(\theta_1\theta_2\ldots\theta r) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \phi(\theta_1, \theta_2\cdots\theta_r)\,\psi''_{ij}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\psi(\theta_1,\theta,\ldots,\theta_r)\phi''_{ij}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j+\sum_{i,j=1}^{r}\phi_i'\psi'_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j+\cdots$$

$$-\phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\,\psi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\,\psi''_{ij}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\psi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\,\phi''_{ij}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j-\cdots$$

$$\simeq\sum_{i,j=1}^{r}\phi'_i\psi'_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

(σ_i, σ_j এর একত্র তিন ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ বর্জন ক'রে)

সুতরাং $\text{cov}\,\{\phi(T_1, T_2,\ldots, T_r), \psi(T_1, T_2,\ldots, T_r)\}$

$$\simeq\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial\phi(T_1,T_2,\ldots,T_r)}{\partial T_i}\times\frac{\partial\psi(T_1,T_2,\ldots,T_r)}{\partial T_i}\right]_E V(T_i)$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r}\left[\frac{\partial\phi(T_1,T_2,\ldots,T_r)}{\partial T_i}\times\frac{\partial\psi(T_1,T_2,\ldots,T_r)}{\partial T_j}\right]_E\times \text{cov}\,(T_i, T_j)$$

উপরিলিখিত অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে নীচে কয়েকটি নমুনাঙ্কের প্রত্যাশা ভেদমান, সহভেদমান ইত্যাদি নিরূপণ করা হচ্ছে। মূল অনুসিদ্ধান্তগুলির শুদ্ধিমাত্রানুযায়ী নীচের প্রত্যাশাগুলি $\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ পর্যন্ত এবং ভেদমান ও সহভেদমান $\theta\left(\frac{1}{n}\right)$ পর্যন্ত শুদ্ধ অর্থাৎ প্রত্যাশায় $\frac{1}{n}$ এর $\frac{1}{2}$ ঘাতের বেশী ও ভেদমান সহভেদমানে $\frac{1}{n}$ এর 1 ঘাতের বেশী রাশি অগ্রাহ্য করা হয়েছে।

15.3.1 নমুনালব্ধ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের প্রত্যাশা ভেদমান ইত্যাদি :

ধরলাম n আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনালব্ধ r পর্যায়ের অশোধিত পরিঘাত m'_r ও গড়কেন্দ্রিক পরিঘাত m_r

এখন $$m_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} m'_{r-i} m'^{\,i}_1$$

সুতরাং $$E(m_r) = E\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} m'_{r-i} m'^{\,i}_1$$

$$\simeq \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu'_{r-i} \mu'^{\,i}_1$$

অর্থাৎ $$\simeq \mu_r$$

এখন থেকে কাজের সুবিধার জন্য পূর্ণকের গড়কে নমুনাজ পরিঘাত মাপনের মূলবিন্দু ধরা হ'ল।

$$V(m_r)$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_i}\right]^2_E V(m'_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r} \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_i}\cdot\frac{\partial m_r}{\partial m'_j}\right]_E \operatorname{cov}(m'_i, m'_j)$$

এখন $$\frac{\partial m_r}{\partial m'_r} = 1$$

সুতরাং $$\left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_r}\right]_E = 1$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial m'_{r-i}} = (-1)^i \binom{r}{i} m'^{\,i}_1, \quad i = 1, 2, \ldots, r-2$$

সুতরাং $$\left[\frac{\partial m_r}{\partial' m_{r-i}}\right]_E = 0$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial m'_1} = -\binom{r}{1} m'_{r-1} + \binom{r}{2} m'_{r-2} \times 2m'_1 - \cdot$$

সুতরাং $$\left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_1}\right]_E = -r\mu_{r-1}$$

তাই $$V(m_r)$$

$$\simeq \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_r}\right]^2_E V(m'_r) + \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_1}\right]^2_E V(m'_1)$$

$$+ 2\left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_r}\cdot\frac{\partial m_r}{\partial m'_1}\right]_E \operatorname{cov}(m'_r, m'_1)$$

অর্থাৎ $$\simeq \frac{1}{-}(\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2\mu_{r-1}^2\mu_2 - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1})$$

$\text{Cov}\,(m_r, m_s)$

r বা s যেটি ছোট

$$\simeq \sum_{i=1} \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_i}\frac{\partial m_s}{\partial m'_i}\right]_E V(m'_i)$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r,s} \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_i}\frac{\partial m_s}{\partial m'_j}\right]_E \text{cov}\,(m'_i, m'_j)$$

অর্থাৎ $\simeq \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_r}\cdot\frac{\partial m_s}{\partial m'_s}\right]_E \text{cov}(m'_r, m'_s) + \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_r}\frac{\partial m_s}{\partial m'_1}\right]_E \text{cov}(m'_r, m'_1)$

$+ \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_1}\frac{\partial m_s}{\partial m'_s}\right]_E \text{cov}\,(m'_1, m'_s) + \left[\frac{\partial m_r}{\partial m'_1}\cdot\frac{\partial m_s}{\partial m'_1}\right] V(m'_1)$

অর্থাৎ $\simeq \frac{1}{n}\,(\mu_{r+s} - \mu_r\mu_s - s\mu_{r+1}\mu_{s-1} - r\mu_{r-1}\mu_{s+1} + rs\mu_{r-1}\mu_{s-1}\mu_2)$

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র হিসেবে

$$V(m_2) \simeq (\mu_4 - \mu_2{}^2)/n$$
$$V(m_3) \simeq (\mu_6 - \mu_3{}^2 + 9\mu_2{}^3 - 6\mu_2\mu_4)/n$$
$$V(m_4) \simeq (\mu_8 - \mu_4{}^2 + 16\mu_2\mu_3{}^2 - 8\mu_3\mu_5)/n$$
$$\text{cov}\,(m_2, m_3) \simeq (\mu_5 - 4\mu_2\mu_3)/n$$
$$\text{cov}\,(m_2, m_4) \simeq (\mu_6 - \mu_2\mu_4 - 4\mu_3{}^2)/n$$
$$\text{cov}\,(m_3, m_4) \simeq (\mu_7 - \mu_3\mu_4 + 12\mu_2{}^2\mu_3 - 3\mu_2\mu_5 - 4\mu_3\mu_4)/n$$

সুতরাং নর্ম্যাল পূর্ণকের ক্ষেত্রে, যদি প্রমাণ বিচ্যুতি σ হয়, তবে

$$V(m_2) \simeq 2\sigma^4/n$$
$$V(m_3) \simeq 6\sigma^6/n$$
$$V(m_4) \simeq 96\sigma^8/n$$
$$\text{cov}\,(m_2, m_3) \simeq 0$$
$$\text{cov}\,(m_2, m_4) \simeq 12\sigma^6/n$$
$$\text{cov}\,(m_3, m_4) \simeq 0$$

15.3.2 নমুনাজ প্রমাণ বিচ্যুতির ভেদমান :

ধরলাম নমুনাজ প্রমাণ বিচ্যুতি s

সুতরাং $V(s) = V(\sqrt{m_2})$

$$\simeq \left[\frac{d\sqrt{m_2}}{dm_2}\right]_E V(m_2)$$

অর্থাৎ $\simeq\left[\frac{1}{2\sqrt{m_2}}\right]_E^2 V(m_2)$

অর্থাৎ $\simeq\frac{\mu_4-\mu_2^2}{4n\mu_2}$

নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য $V(s)\simeq\frac{\sigma^2}{2n}$

15.3.3 নমুনাজ প্রতিবৈষম্যমাপক অঙ্কের ভেদমান (কেবল্ক নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য) :

ধরলাম নমুনাজ প্রতিবৈষম্যমাপক অঙ্ক b_1

স্বতরাং $V(b_1)=V\left(\frac{m_3^2}{m_2^3}\right)$

$$\simeq\left[\frac{\partial b_1}{\partial m_3}\right]_E^2 V(m_3)+\left[\frac{\partial b_1}{\partial m_2}\right]_E^2 V(m_2)+2\left[\frac{\partial b_1}{\partial m_3}\frac{\partial b_1}{\partial m_2}\right]_E \times \text{cov}\,(m_3, m_2)$$

অর্থাৎ $\simeq\left[\frac{2m_3}{m_2^3}\right]_E^2 V(m_3)+\left[\frac{-3m_3^2}{m_2^4}\right]_E^2 V(m_2) + 2\left[\left(\frac{2m_3}{m_2^3}\right)\left(\frac{-3m_3^2}{m_2^4}\right)\right]_E \text{cov}\,(m_3, m_2)$

অর্থাৎ $\simeq\frac{4\mu_3^2}{\mu_2^6}\cdot\frac{6\sigma^6}{n}+\frac{9\mu_3^4}{\mu_2^8}\cdot\frac{2\sigma^4}{n}$ (নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য)

অর্থাৎ $\simeq\frac{1}{n}\left(\frac{24\mu_3^2}{\mu_2^3}+\frac{18\mu_3^4}{\mu_2^6}\right)$

অর্থাৎ $\simeq\frac{1}{n}(24\beta_1+18\beta_1^2)$ [যখন পূর্ণক প্রতিবৈষম্যমাপক অঙ্ক β_1 যা অবশ্য নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য শূন্য]

[নর্ম্যাল পূর্ণকের ক্ষেত্রে b_1-এর ভেদমান দাঁড়াচ্ছে শূন্য, তার মানে কিন্তু কখনও এই নয় যে b_1 একটি ধ্রুবক। b_1-এর ভেদমানের প্রাকক্কলক দাঁড়ায় $(24b_1+18b_1^2)/n$ ।

$g_1=\sqrt{b_1}$ হলে তার ভেদমান নিম্নলিখিতরূপ হবে

$V(g_1)=V(\sqrt{b_1})$

অর্থাৎ $\simeq\left[\frac{dg_1}{db_1}\right]_E^2 V(b_1)$

অর্থাৎ $\simeq \left[\frac{1}{2\sqrt{b_1}}\right]_E^2 V(b_1)$

অর্থাৎ $\simeq \frac{1}{4\beta_1} \times \frac{24\beta_1 + 18\beta_1^2}{n}$

অর্থাৎ $\simeq \frac{6}{n} + \frac{9\beta_1}{2n}$

অর্থাৎ $\simeq \frac{6}{n}$ (যেহেতু $\beta_1 = 0$)

15.3.4 নমুনাজ তীক্ষ্ণতামাপক অঙ্কের ভেদমান (কেবল নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য) :

ধরলাম নমুনাজ তীক্ষ্ণতামাপক অঙ্ক b_2

সুতরাং $V(b_2) = V\left(\frac{m_4}{m_2^2}\right)$

$$\simeq \left[\frac{\partial b_2}{\partial m_4}\right]_E^2 V(m_4) + \left[\frac{\partial b_2}{\partial m_2}\right]_E^2 V(m_2) + 2\left[\frac{\partial b_2}{\partial m_4} \times \frac{\partial b_2}{\partial m_2}\right]_E \operatorname{cov}(m_4, m_2)$$

অর্থাৎ $\simeq \left[\frac{1}{m_2^2}\right]_E^2 V(m_4) + \left[-\frac{2m_4}{m_2^3}\right]_E^2 V(m_2) + 2\left[\left(\frac{1}{m_2^2}\right) \times \left(\frac{-2m_4}{m_2^3}\right)\right]_E \operatorname{cov}(m_4, m_2)$

অর্থাৎ $\simeq \left[\frac{1}{\mu_2^4} \times \frac{96\sigma^8}{n} + \frac{4\mu_4^2}{\mu_2^6} \times \frac{2\sigma^4}{n} - \frac{4\mu_4}{\mu_2^5} \times \frac{12\sigma^6}{n}\right]$

(নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য)

অর্থাৎ $\simeq \frac{96}{n} + \frac{72}{n} - \frac{144}{n}$

অর্থাৎ $\simeq \frac{24}{n}$

$g_2 = b_2 - 3$ হলে তার ভেদমানও হবে $\frac{24}{n}$.

15.3.5 নমুনাজ ভেদাঙ্কের ভেদমান (কেবল নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য) :

ধরলাম নমুনাজ ভেদাঙ্ক v

স্মৃতরাং $\text{var}(v)$

$$= \text{var}\left(\frac{\sqrt{m_2}}{m_1'}\right) \qquad (v\text{-র রূপে } 100 \text{ উৎপাদকটি না ধ'রে})$$

$$\simeq \left[\frac{\partial v}{\partial m_2}\right]_E^2 \text{var}(m_2) + \left[\frac{\partial v}{\partial m_1'}\right]_E^2 \text{var}(m_1')$$

$$+ 2\left[\frac{\partial v}{\partial m_2} \times \frac{\partial v}{\partial m_1'}\right]_E \text{cov}(m_2, m'_1)$$

অর্থাৎ $$\simeq \left[\frac{1}{2m_1'\sqrt{m_2}}\right]_E^2 \text{var}(m_2) + \left[-\frac{\sqrt{m_2}}{m_1'^2}\right]_E^2 \text{var}(m_1')$$

$$+ 2\left[\left(\frac{1}{2m_1'\sqrt{m_2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{m_2}}{m_1'^2}\right)\right]_E \text{cov}(m_2, m_1')$$

অর্থাৎ $$\simeq \frac{1}{4\mu_1'^2\mu_2} \times \frac{2\sigma^4}{n} + \frac{\mu_2}{\mu_1'^4} \times \frac{\sigma^2}{n} \qquad (\text{নর্ম্যাল পূর্ণকের জন্য})$$

অর্থাৎ $$\simeq \frac{1}{n}\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1'^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1'^4}\right)$$

অর্থাৎ $$\simeq \frac{1}{n}\left(\frac{V^2}{2} + V^4\right)$$

(যখন পূর্ণকে ভেদাঙ্ক V, ওতেও 100 উৎপাদকটি না ধ'রে)

অর্থাৎ $$\simeq \frac{V^2}{2n}(1 + 2V^2).$$

15.3.6 নমুনাজ সহগাঙ্কের ভেদমান :

ধরলাম নমুনাজ সহগাঙ্ক r

তাহলে $V(r) \simeq \frac{(1-\rho^2)^2}{n}$, যখন পূর্ণকে সহগাঙ্ক ρ

[এর প্রমাণ এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে]

15.3.7 নমুনাজ p-তম ভগ্নাংশকের ভেদমান :

ধরলাম নমুনাজ p-তম ভগ্নাংশক z_p

তাহলে $V(z_p) \simeq \frac{p(1-p)}{n[f(\zeta_p)]^2}$

যখন একটি অবিচ্ছিন্ন চল x-এর ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ এবং ζ_p পূর্ণকে p-তম ভগ্নাংশক

[এর প্রমাণও এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে]

সুতরাং মধ্যমমানের ক্ষেত্রে

$$V(z_{0\cdot 5}) \sim \frac{1}{4n[f(\zeta_{0\cdot 5})]^2}$$

যদি পূর্ণক নর্ম্যাল হয় এবং এর ভেদমান σ^2 হয়, তবে

$$V(z_{0\cdot 5}) \simeq \frac{2\pi\sigma^2}{4n} \qquad \Big[\text{কারণ এক্ষেত্রে } \zeta_{0\cdot 5} = \text{গড় } \mu,$$

$$\text{তাই } f(\zeta_{0\cdot 5}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Big]$$

$$\text{অর্থাৎ } \simeq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}.$$

15.4 কয়েকটি বিশেষক্ষেত্রে অন্তর প্রাক্কলন ও প্রকল্প বিচার :

নমুনার আয়তন বৃহৎ হলে আস্থা অন্তর নিরূপণ ও প্রকল্প বিচার সম্বন্ধে সাধারণভাবে 15.2 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে। এখন উদাহরণস্বরূপ নীচে কয়েকটি বিশেষক্ষেত্রে ঐ পদ্ধতি প্রয়োগ করা হচ্ছে।

15.4.1 দ্বিপদ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম কোন পূর্ণকে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের অংশের মান P এবং এই পূর্ণক থেকে n (বৃহৎ) আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে, যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। নমুনাতে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের সংখ্যাকে x এবং অংশের মানকে অর্থাৎ $\frac{x}{n}$ -কে p ধরা হ'ল।

p-র আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে আমরা দেখি

$$E(p) = P$$

$$V(p) = \frac{P(1-P)}{n}$$

$V(p)$-এর প্রাক্কলক $\frac{p(1-p)}{n}$

$$\xi = \frac{p-P}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

সুতরাং P-র $100(1-\alpha)\%$ আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্বসীমাদ্বয় যথাক্রমে আসন্নভাবে

$$p - \xi_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{এবং} \quad p + \xi_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H : P = P_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি

$$E(p) = P$$
$$= P_0 \quad (\text{মুখ্য প্রকল্পানুসারে})$$
$$V(p) = \frac{P(1-P)}{n}$$
$$= \frac{P_0(1-P_0)}{n} \quad (\text{মুখ্য প্রকল্পানুসারে})$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{p-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \left[\text{বা } \frac{x-nP_0}{\sqrt{nP_0(1-P_0)}} \right]$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

তাই সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে প্রমাণ নর্ম্যাল বিভাজনের 100% দক্ষিণ পুচ্ছান্ত, বাম পুচ্ছান্ত ও উভয় পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta > \theta_0$, $H : \theta < \theta_0$ ও $H : \theta \neq \theta_0$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে। (অবশ্য এখানে সংশয়মাত্রা আসন্নভাবে $100\alpha\%$)।

15.4.2 দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ পূর্ণকের

ধরলাম দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ পূর্ণকে A ধর্মাবলম্বী সদস্যের অংশের মান যথাক্রমে P_1 ও P_2 এবং এই পূর্ণক দুটি হতে যথাক্রমে n_1 ও n_2 (উভয়ই

বৃহৎ) আয়তনের দুটি সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে, যাদের অবক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। নমুনাদ্বয়ে A-ধর্মাবলম্বী সদস্যের সংখ্যা ধরা যাক যথাক্রমে x_1 ও x_2 এবং অংশের মান $\frac{x_1}{n_1}$ ও $\frac{x_2}{n_2}$ যথাক্রমে p_1 ও p_2.

$(P_1 - P_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে আমরা দেখি

$$E(p_1 - p_2) = P_1 - P_2$$

$$V(p_1 - p_2) = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

এবং $V(p_1 - p_2)$-এর প্রাক্কলক $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

সুতরাং $$\xi = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

সুতরাং $(P_1 - P_2)$-এর $100(1-\alpha)\%$ আস্থা অন্তরের অধঃ ও ঊর্ধ্বসীমাদ্বয় যথাক্রমে আসন্নভাবে

$$(p_1 - p_2) - \xi_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

এবং $$(p_1 - p_2) + \xi_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad P_1 = P_2$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি

$$E(p_1 - p_2) = P_1 - P_2$$
$$= 0 \qquad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$

$$V(p_1 - p_2) = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

$$= P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে যখন P_1 ও P_2 উভয়েরই সাধারণ মান P)

$V(p - p_2)$-এর প্রাক্কলক $= p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$

যেখানে $$p=\frac{n_1p_1+n_1p_2}{n_1+n_2}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে প্রমাণ নর্ম্যাল বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণ পুচ্ছান্ত, বাম পুচ্ছান্ত ও উভয় পুচ্ছান্ত যথাক্রমে বৈকল্পিক প্রকল্প $H: P_1 > P_2$, $H: P_1 < P_2$ ও $H: P_1 \neq P_2$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে। (অবশ্য এখানে সংশয়মাত্রা আসন্নভাবে $100\alpha\%$)

15.4.3 পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ পূর্ণকাঙ্ক λ (বৃহৎ) সম্বলিত পোয়াসঁ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি n আয়তনের সমসম্ভব নমুনা, যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

λ-র আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে যদি

$$y=\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ হয়, তবে}$$

$$E(y)=n\lambda$$
$$V(y)=n\lambda$$
$$V(y)\text{-এর প্রাক্কলক}=y$$

সুতরাং $$\xi=\frac{y-n\lambda}{\sqrt{y}}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

সুতরাং λ-র $100(1-\alpha)\%$ আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্বসীমাদ্বয় যথাক্রমে $\frac{1}{n}(y-\xi_{\alpha/2}\sqrt{y})$ এবং $\frac{1}{n}(y+\xi_{\alpha/2}\sqrt{y})$.

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_o: \quad \lambda = \lambda_o$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে

$$E(y) = n\lambda$$
$$= n\lambda_o \quad (\text{ মুখ্য প্রকল্পানুসারে })$$
$$V(y) = n\lambda$$
$$= n\lambda_o \quad (\text{ মুখ্য প্রকল্পানুসারে })$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{y - n\lambda_o}{\sqrt{n\lambda_o}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে প্রমাণ নর্ম্যাল বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণ পুচ্ছান্ত, বাম পুচ্ছান্ত ও উভয় পুচ্ছান্ত বৈকল্পিক প্রকল্প $H: \lambda > \lambda_o$, $H: \lambda < \lambda_o$ ও $H: \lambda \neq \lambda_o$-এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে। (অবশ্য এখানে সংশয়মাত্রা আসন্নভাবে $100\alpha\%$)

15.4.4 k-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ পোয়াসঁ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$ পূর্ণকাঙ্ক λ_i (বৃহৎ) সম্বলিত পোয়াসঁ পূর্ণক থেকে সংগৃহীত একটি n_i আয়তনের সমসম্ভব নমুনা, যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ, $i = 1, 2, \ldots, k$। পোয়াসঁ পূর্ণকগুলিও যেন পরস্পর নিরপেক্ষ।

মুখ্য প্রকল্প

$$H_o: \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখতে পাই যে, যদি

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = y_i \text{ হয়, তবে}$$

$$E(y_i) = n_i\lambda_i$$
$$= n_i\lambda \quad (\text{ মুখ্য প্রকল্পানুসারে })$$
$$V(y_i) = n_i\lambda_i$$
$$= n_i\lambda \quad (\text{ মুখ্য প্রকল্পানুসারে })$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1} \frac{(y_i - n_i\lambda)^2}{n_i}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন k স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে k স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজনের $100\alpha\%$ দক্ষিণ পুচ্ছান্ত বৈকল্পিক প্রকল্প H : ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ সকলে λ-র সমান নয়) এর জন্য বর্জনাঙ্কলরূপে গণ্য হবে। (অবশ্য এখানে সংশয়মাত্রা আসন্নভাবে $100\alpha\%$)

এখন দেখা যাক মুখ্য প্রকল্প

$$H_0: \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k$$

বিচার করতে হলে কীভাবে অগ্রসর হতে হবে।

স্পষ্টতঃই $E(y_i) = n_i\lambda_i$

$= n_i\lambda$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে যখন $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$-র সাধারণ মান λ)

$V(y_i) = n_i\lambda_i$

$= n_i\lambda$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

এখন λ-র গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক

$$\hat{\lambda} = \sum_{i,j=1}^{k,n_i} x_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \Big| \sum_{i=1} n_i$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\chi_{k-1}^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(y_i - n_i\hat{\lambda})^2}{n_i\hat{\lambda}}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন।

সুতরাং সংশয়মাত্রা $100\alpha\%$ হলে $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজনের

$100\alpha\%$ দক্ষিণ পুচ্ছান্ত বৈকল্পিক প্রকল্প H : ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ সকলে সমান নয়) এর জন্য বর্জনাঞ্চলরূপে গণ্য হবে। (অবশ্য এখানেও সংশয়মাত্রা আসন্নভাবে $100\alpha\%$)

(পূর্ণকাঙ্ক λ-র জায়গায় তার প্রাক্কলক ব্যবহার করায় χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 1 কমেছে, এর প্রমাণ এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে।)

15.4.5 নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ গড় μ ও ভেদমান σ^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n (বৃহৎ) আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা যার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

(A) ধরলাম σ জানা আছে, μ জানা নেই।

μ-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে গিয়ে আমরা দেখি যে, যদি

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n \text{ হয়, তবে}$$

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \sigma^2/n$$

সুতরাং
$$\xi = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$
-এর বিভাজন $N(0, 1)$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$= \mu_0 \qquad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী)}$$

$$V(\bar{x}) = \sigma^2/n$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

-এর বিভাজন $N(0, 1)$

(এক্ষেত্রে আস্থা অন্তর নিরূপণ ও প্রকল্পবিচার যথার্থ হয়েছে।)

(B) ধরলাম μ জানা আছে, σ জানা নেই।

σ-র আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে গিয়ে আমরা দেখি যে, যদি

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 / n}$$ হয়, তবে

আসন্ন $E(S) = \sigma$

আসন্ন $V(S) = \sigma^2/2n$

আসন্ন $V(S)$-এর প্রাক্কলক $S^2/2n$

সুতরাং $$\xi = \frac{S - \sigma}{S/\sqrt{2n}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad \sigma = \sigma_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি যে,

আসন্ন $E(S) = \sigma$

$= \sigma_0$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

আসন্ন $V(S) = \sigma^2/2n$

$= \sigma_0^2/2n$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

(C) ধরলাম μ ও σ কোনটাই জানা নেই

μ-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে গিয়ে আমরা দেখি

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$V(\bar{x}) = \sigma^2/n$$

$V(\bar{x})$-এর প্রাক্কলক $= s^2/n$

যেখানে $$s^2 = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2/n$$

$$= \left(\sum^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \Big/ n$$

সুতরাং $$\xi = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$.

আবার মুখ্য প্রকল্প

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0$$

বিচার করতে হলে আমরা দেখি

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$= \mu_0 \quad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$
$$V(\bar{x}) = \sigma^2/n$$
$$V(\bar{x})\text{-এর প্রাক্কলক} = s^2/n$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

তারপর σ-র আস্থা অন্তর নিরূপণ করতে গিয়ে আমরা দেখি

আসন্ন $E(s) = \sigma$

আসন্ন $V(s) = \sigma^2/2n$

আসন্ন $V(s)$-এর প্রাক্কলক $= s^2/2n$

সুতরাং $$\xi = \frac{s - \sigma}{s/\sqrt{2n}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

আর মুখ্যপ্রকল্প

$$H_0 : \quad \sigma = \sigma_0$$

বিচার করতে গেলে আমরা দেখি

আসন্ন $E(s) = \sigma$

$= \sigma_0$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

আসন্ন $V(s) = \sigma^2/2n$

$= \sigma_0^2/2n$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী

$$\xi = \frac{s - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

15.4.6 দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক :

ধরলাম $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1})$ গড় μ_1 ও ভেদমান σ_1^2 বিশিষ্ট একটি নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n_1 আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত একটি সমসম্ভব নমুনা এবং $(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2})$ গড় μ_2 ও ভেদমান σ_2^2 বিশিষ্ট অপর একটি নিরপেক্ষ নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n_2 আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত একটি সমসম্ভব নমুনা।

(A) ধরলাম σ_1 ও σ_2 জানা আছে, μ_1 ও μ_2 জানা নেই।

$(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ :

ধরলাম
$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}/n_1$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}/n_2$$

সুতরাং
$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

সুতরাং
$$\xi = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

-এর বিভাজন $N(0, 1)$

মুখ্য প্রকল্প $H: \ \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ বিচার :

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$
$$= \delta_0 \qquad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

-এর বিভাজন $N(0, 1)$.

(এক্ষেত্রে আস্থা অন্তর নিরূপণ ও প্রকল্প বিচার যথার্থ হয়েছে।)

(B) ধরলাম μ_1 ও μ_2 জানা আছে, σ_1 ও σ_2 জানা নেই।

$(\sigma_1 - \sigma_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ :

ধরলাম $$S_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2 /}$$

ও $$S_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2 / n_2}$$

সুতরাং আসন্ন $E(S_1 - S_2) = \sigma_1 - \sigma_2$

আসন্ন $V(S_1 - S_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}$

আসন্ন $V(S_1 - S_2)$-এর প্রাক্কলক $\dfrac{S_1^2}{2n_1} + \dfrac{S_2^2}{2n_2}$

সুতরাং $$\xi = \frac{(S_1 - S_2) - (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sqrt{S_1^2/2n_1 + S_2^2/2n_2}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ বিচার :

আসন্ন $E(S_1 - S_2) = \sigma_1 - \sigma_2$

$= 0$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

আসন্ন $$V(S_1 - S_2) = \frac{\sigma_1^2}{2n_1} + \frac{\sigma_2^2}{2n_2}$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)$$

(মুখ্য প্রকল্পানুসারে, যখন σ_1 ও σ_2-এর সাধারণ মান σ)

আসন্ন $V(S_1 - S_2)$-এর প্রাক্কলক

$$= S^2\left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)$$

যেখানে $$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\sum^{n} (x_{1i} - \mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2}{n_1 + n_2}$$

সুতরাং নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{S_1 - S_2}{S\sqrt{1/2n_1 + 1/2n_2}}\text{-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন } N(0, 1)$$

(*c*) ধরলাম μ_1, μ_2, σ_1 ও σ_2 কোনটাই জানা নেই। $(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ :

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-এর প্রাক্‌কলক $= \dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}$

যেখানে $$s_1^2 = \sum_{i=1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2/n_1$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 - n_1\bar{x}_1^2\right)\Big/ n_1$$

ও $$s_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2/n_2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 - n_2\bar{x}_2^2\right)\Big/ n_2$$

সুতরাং $$\xi = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}\text{-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন } N(0, 1)$$

মুখ্য প্রকল্প H : $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ বিচার :

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$= \delta_0 \qquad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-এর প্রাক্‌কলক $= \dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}\text{-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন } N(0, 1)$$

$(\sigma_1 - \sigma_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণ :

আসন্ন $E(s_1 - s_2) = \sigma_1 - \sigma_2$

আসন্ন $V(s_1 - s_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}$

আসন্ন $V(s_1 - s_2)$-এর প্রাক্কলক $= \dfrac{s_1^2}{2n_1} + \dfrac{s_2^2}{2n_2}$

সুতরাং $\xi = \dfrac{(s_1 - s_2) - (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sqrt{s_1^2/2n_1 + s_2^2/2n_2}}$ এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ বিচার :

আসন্ন $E(s_1 - s_2) = \sigma_1 - \sigma_2$

$= 0$ (মুখ্য প্রকল্পানুসারে)

আসন্ন $V(s_1 - s_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}$

$= \sigma^2 \left(\dfrac{1}{2n_1} + \dfrac{1}{2n_2}\right)$

(মুখ্য প্রকল্পানুসারে যখন σ_1 ও σ_2-এর সাধারণ মান σ)

আসন্ন $V(s_1 - s_2)$-এর প্রাক্কলক

$\left(\dfrac{1}{2n_1} + \dfrac{1}{2n_2}\right)$

যেখানে $s^2 = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 - n_1\bar{x}_1^2 - n_2\bar{x}_2^2}{n_1 + n_2}$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$\xi = \dfrac{s_1 - s_2}{s\sqrt{1/2n_1 + 1/2n_2}}$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

[$(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থা অন্তর নিরূপণে বা তৎসম্বন্ধে প্রকল্প বিচারে যদি বলা থাকত যে $\sigma_1 = \sigma_2$, কিন্তু তাদের সাধারণ মান দেওয়া না থাকত, তবে উভয় ক্ষেত্রেই s_1 ও s_2-এর পরিবর্তে s ব্যবহার করা হ'ত।]

15.4.7 দ্বিচল নর্ম্যালের সহগাঙ্ক :

ধরলাম দুটি চল x ও y-এর যৌথ বিভাজন দ্বিচল নর্ম্যাল।

ধরলাম x ও y-এর সহগাঙ্ক ρ এবং n (বৃহৎ) আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনাতে সহগাঙ্ক r.

ρ-র আস্থা অন্তর নিরূপণ :

আসন্ন $E(r)=\rho$

আসন্ন $V(r)=\dfrac{(1-\rho^2)^2}{n}$

আসন্ন $V(r)$-এর প্রাক্কলক $=\dfrac{(1-r^2)^2}{n}$

সুতরাং $\xi=\dfrac{r-\rho}{(1-r^2)/\sqrt{n}}$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

মুখ্য প্রকল্প $H:\rho=\rho_0$ বিচার :

$$\text{আসন্ন } E(r)=\rho$$
$$=\rho_0 \quad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$

$$\text{আসন্ন } V(r)=\frac{(1-\rho^2)^2}{n}$$
$$=\frac{(1-\rho_0{}^2)^2}{n} \quad \text{(মুখ্য প্রকল্পানুসারে)}$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী নমুনাঙ্ক

$$\xi=\frac{r-\rho_0}{(1-\rho_0{}^2)/\sqrt{n}}\text{-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন } N(0, 1)$$

বিশেষ ক্ষেত্রে, ρ_0 যদি শূন্য হয় অর্থাৎ মুখ্য প্রকল্প যদি $H_0:\rho=0$ হয় তবে

$$\xi=r\sqrt{n}\text{-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন } N(0, 1)$$

15.5 নমুনাঙ্কের রূপান্তর (Transformation of Statistics) :

অনেক সময় নমুনাঙ্কের এমন রূপান্তর করা চলে যাতে তার ক্রমাসন্ন ভেদমান পূর্ণকাঙ্ক মুক্ত হয়। মৌলিক নমুনাঙ্কের চেয়ে এই রূপান্তরিত নমুনাঙ্ক বেশী তাড়াতাড়ি নর্ম্যাল বিভাজন অনুসরণ করে, অর্থাৎ অনুমানে ক্রমাসন্ন নর্ম্যাল বিভাজনের ব্যবহারের জন্য মৌলিক নমুনাঙ্কের ক্ষেত্রে যে নমুনায়তনের প্রয়োজন হয় রূপান্তরিত হবার পর কম নমুনায়তনেই সে কাজ চলে। ভেদমান পূর্ণকাঙ্ক বিমুক্ত হওয়ায় পূর্ণকাঙ্কের আস্থা অন্তর নিরূপণে ও তৎসম্বন্ধে প্রকল্প বিচারে অনেক সুবিধা হয়।

ধরলাম T একটি নমুনাঙ্ক যার প্রত্যাশা θ ও ভেদমান $\varphi(\theta)$, আরও ধরলাম T-কে $\phi(T)$-তে রূপান্তরিত করা হ'ল যাতে $\phi(T)$-এর ক্রমাসন্ন ভেদমান θ-বিমুক্ত হয়, অর্থাৎ যেন একটি ধ্রুবক c হয়।

এখন ক্রমাসন্নভাবে

$$V\{\phi(T)\} = \left[\frac{d\phi(T)}{dT}\right]_E^2 V(T)$$

সুতরাং
$$c = \left[\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right]^2 \varphi(\theta)$$

অর্থাৎ
$$\phi(\theta) = \int \sqrt{\frac{c}{\varphi(\theta)}}\, d\theta$$

সুতরাং
$$\phi(T) = \int \sqrt{\frac{c}{\varphi(T)}}\, dT$$

নীচে কয়েকটি প্রয়োজনীয় রূপান্তর দেওয়া হ'ল।

15.5.1 $\sin^{-1}\sqrt{p}$ রূপান্তর :

ধরলাম বেরনুলির n (মোটামুটি বৃহৎ) পরীক্ষায় কৃতকার্যতার অংশ p যেখানে কৃতকার্যতার আসল সম্ভাবনা P

এখন
$$E(p) = P$$
$$V(p) = \frac{P(1-P)}{n}$$

সুতরাং
$$\phi(p) = \int \sqrt{\frac{c}{\frac{p(1-p)}{n}}}\, dp$$

$$= \int 2\sqrt{nc}\, d\theta \quad (p\text{-র পরিবর্তে } \sin^2\theta \text{ বসিয়ে})$$

$$= 2\sqrt{nc}\,\theta$$

$$= \theta \qquad \left(c\text{-র পরিবর্তে } \frac{1}{4n} \text{ বসিয়ে}\right)$$

সুতরাং $\sin^{-1}\sqrt{p}$-র ক্রমাসন্ন বিভাজন $N\left(\sin^{-1}\sqrt{P}, \frac{1}{4n}\right)$

15.5.2 $\sqrt{x}$ রূপান্তর :

ধরলাম x একটি পোয়াসঁ চল, যেখানে পূর্ণকাঙ্ক λ (মোটামুটি বৃহৎ)

এখন $E(x)=\lambda$

$V(x)=\lambda$

সুতরাং $\phi(x)=\int\sqrt{\frac{c}{x}}\,dx$

$=2\sqrt{cx}$

$=\sqrt{x}$ (c-র পরিবর্তে $\frac{1}{4}$ বসিয়ে)

সুতরাং $\sqrt{x}$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(\sqrt{\lambda},\frac{1}{4})$

15.5.3 log s² ও log s রূপান্তর :

ধরলাম σ^2 ভেদমানবিশিষ্ট নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে সংগৃহীত n (মোটামুটি বৃহৎ) আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনার ভেদমান s^2

এখন আসন্ন $E(s^2)=\sigma^2$

আসন্ন $V(s^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$

সুতরাং $\phi(s^2)=\int\sqrt{\frac{c}{\frac{2s^4}{n}}}\,ds^2$

$=\sqrt{\frac{nc}{2}}\log s^2$

$=\log s^2$ $\left(c\text{-র পরিবর্তে } \frac{2}{n} \text{ বসিয়ে}\right)$

সুতরাং $\log s^2$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N\left(\log\sigma^2,\frac{2}{n}\right)$

আবার আসন্ন $E(s)=\sigma$

আসন্ন $V(s)=\frac{\sigma^2}{2n}$

সুতরাং $\phi(s)=\int\sqrt{\frac{c}{\frac{s^2}{2n}}}\,ds$

$=\sqrt{2nc}\log s$

$=\log s$ $\left(c\text{-র পরিবর্তে } \frac{1}{2n} \text{ বসিয়ে}\right)$

সুতরাং $\log s$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N\left(\log\sigma,\frac{1}{2n}\right)$

15.5.4 $\tanh^{-1} r$ বা z-রূপান্তর :

ধরলাম দ্বিচল নর্ম্যাল বিভাজন থেকে সংগৃহীত n আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনার সহগাঙ্ক r এবং পূর্ণকে অনুরূপ পূর্ণকাঙ্ক ρ.

এখন　আসন্ন　$E(r)=\rho$

আসন্ন　$V(r)=\dfrac{(1-\rho^2)^2}{n}$

সুতরাং

$$\phi(r)=\int\sqrt{\frac{c}{\frac{(1-r^2)^2}{n}}}\,dr$$

$$=\sqrt{nc}\int\frac{dr}{1-r^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{nc}\log\frac{1+r}{1-r}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\qquad\left(c\text{-র পরিবর্তে }\frac{1}{n}\text{ বসিয়ে}\right)$$

$$=\tanh^{-1} r$$

সুতরাং $\tanh^{-1} r$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N\left(\tanh^{-1}\rho,\ \dfrac{1}{n}\right)$

এ বিষয়ে পরীক্ষার পরে অনুসন্ধান করে দেখা গেছে যে এমন কি সাধারণ $n(>8)$-এর জন্যেও $\tanh^{-1} r$ ক্রমাসন্ন নর্ম্যাল, তবে

$\tanh^{-1} r$-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন দাঁড়ায় $N\left(\tanh^{-1}\rho+\dfrac{\rho}{2(n-1)},\ \dfrac{1}{n-3}\right)$

সেটা আবার মোটামুটিভাবে $N\left(\tanh^{-1}\rho,\ \dfrac{1}{n-3}\right)$

এই রূপান্তরকে z-রূপান্তর বলা হয়, অর্থাৎ $\tanh^{-1} r$-কে বলা হয় z, অনুরূপ $\tanh^{-1}\rho$-কে ζ বললে

z-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন মোটামুটি $N\left(\zeta,\ \dfrac{1}{n-3}\right)$

r-এর বিভিন্ন মানের জন্য $\tanh^{-1} r$ পিয়ারসন ও হার্টলের বায়োমেট্রিকা সারণী প্রথমভাগে পাওয়া যাবে।

15.5.5 আস্থা অন্তর নিরূপণে ও প্রকল্প বিচারে নমুনাঙ্ক রূপান্তরের প্রয়োগ :

ধরা যাক k-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিচল নর্ম্যাল বিভাজন থেকে যথাক্রমে $n_1, n_2, \cdots, n_k$ আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয়েছে। নমুনালব্ধ অবেক্ষিত সহগাঙ্কগুলি যেন $r_1, r_2, \ldots, r_k$

পূর্ণকে সহগাঙ্কগুলি $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ হলে আমরা নীচের মুখ্য প্রকল্পটি বিচার করতে চাই

মুখ্য প্রকল্প H_0 : $(\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = \rho_0)$

সেক্ষেত্রে বৈকল্পিক প্রকল্প H : ($\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ সকলে ρ_0-এর সমান নয়)

এই প্রকল্প বিচারের জন্য নিম্নের নমুনাঙ্ক ব্যবহৃত হবে

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)(z_i - \zeta_0)^2 \quad \text{যেখানে } z_i = \tanh^{-1} r_i$$

$$\zeta_0 = \tanh^{-1} \rho_0$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i^2 - 2\zeta_0 \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i + n\zeta_0^2$$

$$\text{যেখানে } n = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)$$

এ আসন্নভাবে k স্বাতন্ত্র্য মাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করবে।

যদি মুখ্য প্রকল্প হয় H_0 : $(\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k)$ এবং

সেক্ষেত্রে বৈকল্পিক প্রকল্প হয় H : ($\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ সকলে সমান নয়),

তাহলে এই প্রকল্প বিচারে লাগবে

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)(z_i - \bar{z})^2 \quad \text{যেখানে } \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)z_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)z_i \right\}^2$$

এ আসন্নভাবে $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্য মাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করবে, কারণ এখানে $\zeta = \tanh^{-1}\rho$-এর পরিবর্তে তার প্রাক্কলক $\bar{z}$ ব্যবহার করা হয়েছে। (মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী ρ_i-গুলির সাধারণ মান যেন ρ)

এখানে লক্ষণীয় $\bar{z}$ হচ্ছে z_i সমূহের ভারপ্রাপ্ত গড় যেখানে ভারগুলি ভেদমানের অন্যোন্যকের সমানুপাতী)

যদি $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k$ হয় তবে তাদের সাধারণ মান ρ-এর বিন্দু প্রাক্কলক হবে $\tanh \bar{z}$

আর ρ-এর আস্থা অন্তর নিরূপণে ব্যবহৃত হবে

$$\xi = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)}(\bar{z} - \zeta)$$

যা আসন্নভাবে একটি প্রমাণ নর্ম্যাল চল, কারণ

$$E(\bar{z}) \simeq \zeta$$

$$V(\bar{z}) \simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)}$$

আবার $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k$-এর ক্ষেত্রে নীচের মুখ্য প্রকল্প বিচার করতে হতে পারে

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho = \rho_0$ (যেখানে ρ হচ্ছে $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$-এর সাধারণ মান)

বৈকল্পিক প্রকল্প $H_0 : \rho \neq \rho_0$

এখানে যে নমুনাঙ্ক ব্যবহৃত হবে সেটি হচ্ছে

$$\xi = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)}(\bar{z} - \zeta_0)$$

বা $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)(\bar{z} - \zeta_o)^2$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i \right\}^2$$

$$- 2\zeta_o \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i + n\zeta_o^2$$

এই χ^2 1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করবে।

15.6 পরিসংখ্যা χ^2 (Frequency χ^2) :

ধরলাম একটি পূর্ণককে কোনও লক্ষণ অনুসারে k-সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং পরস্পর নিঃশেষী শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়েছে এবং বিভিন্ন শ্রেণীতে অংশগুলির মান যেন

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \left(\sum_{i=1}^{k} P_i = 1 \right).$$

এই পূর্ণক থেকে যদি n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয় এবং নমুনাজ অবেক্ষণগুলি যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয়, তবে নমুনাতে বিভিন্ন শ্রেণীর পরিসংখ্যাগুলি যথাক্রমে

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n \right)$$ হবার সম্ভাবনা

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} \prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$$

এই জাতীয় বিভাজনকে বহুপদ বিভাজন (multinomial distribution) বলে।

উপরের রাশিটিকে নীচের মত লেখা চলে :

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} e^{-nP_i} \frac{(nP_i)^{n_i}}{n_i\,!}}{e^{-\sum_{i=1}^{k} nP_i} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} nP_i\right)^n}{n\,!}}$$

উপরিলিখিত বিভাজন পারস্পরিক নিরপেক্ষ পোয়াসঁ চল $n_1, n_2, \ldots, n_k$-এর শর্তাধীন বিভাজন, যেখানে শর্তটি হচ্ছে $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, এবং পোয়াসঁ চল n_i-এর পূর্ণকাঙ্ক হচ্ছে $nP_i (i = 1, 2, \ldots, k)$.

যদি nP_i বেশ বড় হয় তবে

$$\xi_i = \frac{n_i - nP_i}{\sqrt{nP_i}}$$

-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন $N(0, 1)$

এখন ξ_i-গুলির উপর একটি সরল শর্ত আরোপিত আছে বলা চলে, যথা

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{nP_i}\, \xi_i = 0 \quad \left(\text{কারণ} \sum_i (n_i - nP_i) = n - n = 0\right)$$

$$\text{সুতরাং } \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{nP_i} - n$$

-এর বিভাজন আসন্নভাবে $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 ধরা যেতে পারে।

(ξ_i-গুলির উপর একটি সরল শর্ত বর্তমান থাকায় χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 1 কমেছে। এর প্রমাণ এই পুস্তকের আলোচ্য পরিধির বাইরে।)

সাধারণতঃ আমরা দেখি

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{O_i^2}{E_i} - n$$

যেখানে $O_i = i$-তম শ্রেণীতে নমুনালব্ধ অবেক্ষিত পরিসংখ্যা

$E_i = i$-তম শ্রেণীতে প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা

এই χ^2-কে বলে পিয়ারসনীয় (Pearson's) χ^2 বা পরিসংখ্যা χ^2

দ্বিপদ বিভাজনের ক্ষেত্রে, অর্থাৎ যখন $k=2$

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_1} + \frac{(n_2 - nP_2)^2}{nP_2}$$

$$= \frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_1} + \frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_2} \quad \left[\text{কারণ } (n_1 - nP_1) = -(n_2 - nP_2) \right]$$

$$= \frac{(n_1 - nP_1)^2}{n} \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} \right)$$

$$= \frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_1 P_2}$$

$$= \frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP.(1-P)}$$ P_1-এর পরিবর্তে P ও P_2-এর পরিবর্তে $1-P$ বসিয়ে

রাশিবিজ্ঞানে পরিসংখ্যা χ^2-এর সাহায্যে আমরা নানাবিধ প্রকল্প বিচার করতে সক্ষম হই। নীচে এরূপ কয়েকটি প্রয়োগের বিষয় আলোচনা করা হচ্ছে। মনে রাখতে হবে যে প্রত্যেক শ্রেণীর ঔপপত্তিক পরিসংখ্যা যেন অন্ততঃ 5 বা 5-এর চেয়ে বেশী হয়। যদি কোন শ্রেণীর ঔপপত্তিক পরিসংখ্যা 5-এর চেয়ে কম হয়, তবে সেই শ্রেণীকে সন্নিহিত এক বা একাধিক শ্রেণীর সঙ্গে একত্রিত করতে হবে যাতে সম্মিলিত শ্রেণীর ঔপপত্তিক পরিসংখ্যা 5 বা 5-এর অধিক হয়। অন্যথায় উপরের χ^2-এর আসন্ন বিভাজন $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2-এর মতো হবে না।

χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হবে প্রয়োজন মতো সম্মিলিত করার পর এরূপ শ্রেণী-সংখ্যার চেয়ে এক কম।

15.6.1 সাযুজ্যের উৎকর্ষ বিচার (Testing goodness of fit) :

ধরলাম k সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন শ্রেণীর অবেক্ষিত পরিসংখ্যা

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$$

এবং কোন মুখ্য প্রকল্পানুসারে এই শ্রেণীর অংশগুলির (সম্ভাবনাগুলির) মান যথাক্রমে

$$P_1^0, P_2^0, \ldots, P_k^0 \left(\sum_{i=1}^{k} P_i^0 = 1\right)$$

তা হলে
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - nP_i^0)^2}{nP_i^0}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{nP_i^0} - n$$

এ আসন্নভাবে $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 বিভাজন অনুসরণ করবে, যদি অবশ্য প্রতি $i = 1, 2, \ldots, k$ এর জন্যে $nP_i^0 > 5$ হয়।

আমরা স্পষ্টই দেখতে পাই যে আমরা মুখ্য প্রকল্প থেকে যত দূরে সরে যাব অর্থাৎ কোন শ্রেণীর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত পরিসংখ্যা ও প্রত্যাশিত পরিসংখ্যার পার্থক্য যত বেশী হবে χ^2-এর মান ততই বেশী হবে।

তাই মুখ্য প্রকল্প বর্জিত হবে তখনই যখন χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2_{a, k-1}$ হয়। (এখানে মুখ্য প্রকল্পের শর্ত যে কোন ভাবে ব্যাহত হলেই সেটি হবে বৈকল্পিক প্রকল্প।)

অনেক সময় এমন হয় যে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী বিভিন্ন শ্রেণীর অংশগুলির মান পাওয়া যায় না, কারণ তারা যে সমস্ত পূর্ণকাঙ্কের উপর নির্ভরশীল সেগুলি দেওয়া থাকে না।

ধরলাম এইরূপ পরস্পর নিরপেক্ষ পূর্ণকাঙ্কের সংখ্যা $r (< k-1)$। সেগুলির উপযুক্ত প্রাক্কলক (যথা, পরিঘাত পদ্ধতি লব্ধ, গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতি

লব্ধ, বা অপর কোন উপযুক্ত পদ্ধতি লব্ধ প্রাক্কলক) বের ক'রে যদি আমরা পূর্ণকের অংশগুলির মান প্রাক্কলন করি এবং এই প্রাক্কলিত মানগুলি যদি

$\hat{P}_1, \hat{P}_2, \ldots, \hat{P}_k$ হয়, তবে আসন্নভাবে

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{P}_i)^2}{n\hat{P}_i}$$

কিন্তু এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হবে

$k-1$—(প্রাক্কলিত নিরপেক্ষ পূর্ণকাঙ্কের সংখ্যা)

$$= k - r - 1$$

(আমরা ধ'রে নিয়েছি প্রতি $nP_i \geq 5$, নতুবা একাধিক শ্রেণীকে সংযুক্ত করার প্রয়োজন হবে।)

এ উপায়ে আমরা কোন সাযুজ্যরেখা নিরূপণ ক'রে তার সাযুজ্যের উৎকর্ষ বিচার করতে পারি; যেমন দেখতে পারি কোন অবেক্ষিত পরিসংখ্যা বিভাজনকে কোন নর্ম্যাল বিভাজন দিয়ে প্রকাশ করা চলে কি না। এই নর্ম্যাল বিভাজনের দুইটি নিরপেক্ষ পূর্ণকাঙ্ক আছে। প্রকল্পানুযায়ী সেগুলি দেওয়া থাকলে χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা শ্রেণী সংখ্যার চেয়ে এক কম হবে, নতুবা যতগুলি পূর্ণকাঙ্ক প্রাক্কলিত হবে স্বাতন্ত্র্যমাত্রা আরও তত কমবে।

এইপ্রসঙ্গেই বলে রাখা ভাল যে দ্বিপদ (মোট পরীক্ষা সংখ্যা n জানা থাকলে) ও পোয়াসঁ বিভাজনের প্রত্যেকের একটি ক'রে পূর্ণকাঙ্ক থাকে, পিয়ারসনের দ্বিতীয়, তৃতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম প্রকার বিভাজনের নিরপেক্ষ পূর্ণকাঙ্ক সংখ্যা তিন, আর প্রথম, চতুর্থ ও ষষ্ঠ প্রকার বিভাজনের এই সংখ্যা চার।

15.6.2 অন্তর্সাম্য বিচার :

ধরলাম s সংখ্যক পূর্ণক আছে যাদের প্রত্যেকে r সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন শ্রেণীতে বিভক্ত হয়েছে। ধরলাম j-তম পূর্ণকের বেলায় i-তম শ্রেণীতে পড়েছে P_{ij} অংশ, $i=1, 2, \ldots, r$; $j=1, 2, \ldots, s$. এখন ধরলাম j-তম পূর্ণক থেকে n_j আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করা হ'ল, $(j=1, 2, \ldots, s)$ এবং ধরলাম i-তম শ্রেণীতে সদস্য সংখ্যা f_{ij} $(i=1, 2, \ldots, r)$। নীচের সারণী দুটি দ্রষ্টব্য।

বিভিন্ন পূর্ণকে শ্রেণী-অংশ

শ্রেণী \ পূর্ণক	1	2	3	…	j	…	s
1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	…	P_{1j}	…	P_{1s}
2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	…	P_{2j}	…	P_{2s}
3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	…	P_{3j}	…	P_{3s}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	…	P_{ij}	…	P_{is}
…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_{r1}	P_{r2}	P_{r3}	…	P_{rj}	…	P_{rs}
যোগফল	1	1	1	…	1	…	1

বিভিন্ন নমুনায় শ্রেণী-পরিসংখ্যা

শ্রেণী \ নমুনা	1	2	3	…	j	…	s	যোগফল
1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	…	f_{1j}	…	f_{1s}	f_{10}
2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	…	f_{2j}	…	f_{2s}	f_{20}
3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	…	f_{3j}	…	f_{3s}	f_{30}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	f_{i1}	f_{i2}	f_{is}	…	f_{ij}	…	f_{is}	f_{i0}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	f_{r1}	f_{r2}	f_{r3}	…	f_{rj}	…	f_{rs}	f_{r0}
যোগফল	n_1	n_2	n_3	…	n_j	…	n_s	n

এখন মুখ্য প্রকল্প বিচার করতে হবে যে, শ্রেণীর দিক থেকে পূর্ণকগুলি অন্তর্সম অর্থাৎ

$$H_0 : P_{i1} = P_{i2} = \cdots = P_{is} = P_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

বর্তমান কাঠামোয় আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(f_{ij} - n_j P_{ij})^2}{n_j P_{ij}} = \chi^2_{r-1}$$

সুতরাং আসন্নভাবে

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_{ij} - n_j P_{ij})^2}{n_j P_{1j}} = \chi^2_{s(r-1)}$$

[χ^2 সমষ্টির বিভাজনের সূত্রানুযায়ী]

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{ij} - n_j P_i^0)^2}{n_j P_i^0} = \chi^2 s(r-1)$$

অর্থাৎ $s(r-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2

এই নমুনাঙ্কের সাহায্যে উপরিলিখিত মুখ্য প্রকল্পটি বিচার করা সম্ভব; কিন্তু প্রায়ই $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{is}$ এর সাধারণ মান (ধরলাম P_i) জানা থাকে না, অর্থাৎ আমাদের বিচার্য মুখ্য প্রকল্প হবে

$$H_0 : P_{i1} = P_{i2} = \cdots = P_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

সেক্ষেত্রে P_i-এর প্রাক্কলক ব্যবহার করতে হবে। P_i-এর উপযুক্ত প্রাক্কলক হ'ল

$$\hat{P}_i = \sum_{j=1}^{s} f_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{s} n_j$$

$$= f_{i0}/n \quad \left(\text{যেখানে } \sum_{j=1}^{s} f_{ij} = f_{i0} \text{ ও } \sum_{j=1}^{s} n_j = n \right)$$

কারণ মুখ্য প্রকল্পানুসারে P_i যে কোন পূর্ণকের i-তম শ্রেণীতে অংশের মান, আর f_{i0}/n বিভিন্ন নমুনা থেকে সম্মিলিতভাবে i-তম শ্রেণীতে অংশের মান।

এরূপ পরস্পর নিরপেক্ষ $(r-1)$ সংখ্যক অংশের প্রাক্কলক বের করতে হবে, বাকি অংশটি স্বতঃই নির্ণীত, কারণ সব কটি অংশের যোগফল হবে এক।

তাই সেক্ষেত্রে আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{ij} - n_j f_{i0}/n)^2}{n_j f_{i0}/n}$$

$$=n\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}^2/n_j f_{io}-1\right]$$

$$=\chi^2_{s(r-1)-(r-1)}$$

$$=\chi^2_{(r-1)(s-1)}$$ অর্থাৎ $(r-1)(s-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2

$100a\%$ সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প বর্জিত হবে যদি

χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান $> \chi^2{}_{a,\,(r-1)(s-1)}$ হয়।

15.6.3 নিরপেক্ষতা বিচার (Test for Independence) :

ধরলাম একটি পূর্ণককে দুইটি গুণলক্ষণ A ও B-অনুসারে যথাক্রমে r ও s সংখ্যক শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়েছে, যথা,

$$A_1, A_2, \ldots, A_r$$

এবং $$B_1, B_2, \ldots, B_s$$

ধরলাম i-তম A শ্রেণীতে ও j-তম B শ্রেণীতে, অর্থাৎ A_iB_j প্রকোষ্ঠে, সদস্যের অংশের মান P_{ij}। আরও ধরলাম

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij}=P_{io}$$

ও $$\sum_{i=1}^{r} P_{ij}=P_{oj}$$

এখানে লক্ষণীয় যে, P_{ij}-গুলি A ও B-র যৌথ বিভাজন নির্ণয় করে, এবং P_{io}-গুলি A-র ও P_{oj}-গুলি B-র প্রান্তিক বিভাজন নির্দেশ করে।

এখন ধরলাম যে এই পূর্ণক থেকে n আয়তনের একটি পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয়েছে এবং নমুনাতে A_iB_j প্রকোষ্ঠে সদস্য সংখ্যা f_{ij}। আরও ধরলাম

$$\sum_{j=1}^{s} f_{ij}=f_{io}$$

$$\sum_{i=1}^{r} f_{ij}=f_{oj}$$

এ প্রসঙ্গে নীচের দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাস দ্রষ্টব্য।

পূর্ণকে দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাস (অংশের দিক থেকে)

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_s	যোগফল
A_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	$\cdots$	P_{1j}	$\cdots$	P_{1s}	P_{10}
A_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	$\cdots$	P_{2j}	$\cdots$	P_{2s}	P_{20}
A_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	$\cdots$	P_{3j}	$\cdots$	P_{3s}	P_{30}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	$\cdots$	P_{ij}	$\cdots$	P_{is}	P_{i0}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_r	P_{r1}	P_{r2}	P_{r3}	$\cdots$	P_{rj}	$\cdots$	P_{rs}	P_{r0}
যোগফল	P_o	P_{o1}	Y_{o3}	$\cdots$	P_{oj}	$\cdots$	P_{os}	1

নমুনাতে দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাস (পরিসংখ্যার দিক থেকে)

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_s	যোগফল
A_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	$\cdots$	f_{1j}	$\cdots$	f_{1s}	f_{10}
A_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	$\cdots$	f_{2j}	$\cdots$	f_{2s}	f_{20}
A_3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	$\cdots$	f_{3j}	$\cdots$	f_{3s}	f_{30}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_i	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	$\cdots$	f_{ij}	$\cdots$	f_{is}	f_{i0}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_r	f_{r1}	f_{r2}	f_{r3}	$\cdots$	f_{rj}	$\cdots$	f_{rs}	f_{r0}
যোগফল	f_{01}	f_{02}	f_{03}	$\cdots$	f_{0j}	$\cdots$	f_{0s}	n

এবারে মুখ্য প্রকল্প বিচার করতে হবে যে, A ও B গুণলক্ষণদ্বয় নিরপেক্ষ অর্থাৎ

$H_0 : P_{ij} = P_{io} P_{oj}$ $(i = 1, 2, \ldots, r\ ;\ j = 1, 2, \ldots, s)$

বর্তমান কাঠামোয় আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{ij} - nP_{ij})^2}{nP_{ij}} = \chi_{kl-1}^2$$

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{ij} - nP_{io}P_{oj})^2}{nP_{io}P_{oj}} = \chi_{kl-1}$$

অর্থাৎ $(kl-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2

এই নমুনাঙ্কের সাহায্যে উপরিলিখিত মুখ্য প্রকল্পটি বিচার করা সম্ভব, কিন্তু প্রায়ই P_{ij} বা P_{io}, P_{oj} জানা থাকে না। সে ক্ষেত্রে P_{io} ও p_{oj}-এর $(i = 1, 2, \ldots, r$ এবং $j = 1, 2, \ldots, s)$ প্রাক্কলক বের করতে হবে।

P_{io}-এর উপযুক্ত প্রাক্কলক হ'ল f_{io}/n, কারণ P_{io} পূর্ণকের i-তম A শ্রেণীতে অন্তর্ভুক্ত অংশের মান n আর f_{io}/n নমুনাতে অনুরূপ i-তম শ্রেণীতে অন্তর্ভুক্ত অংশের মান। একই কারণে P_{oj}-এর উপযুক্ত প্রাক্কলক হ'ল f_{oj}/n

এরূপ পরস্পর নিরপেক্ষ $r+s-2$ অংশের মানের প্রাক্কলক বের করতে হবে, বাকি দুটি অংশের মান স্বতঃই নির্ণীত হবে, কারণ

$$\sum_{i=1}^{r} P_{io} = 1 \text{ ও } \sum_{j=1}^{s} P_{oj} = 1$$

এখন আসন্নভাবে

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{ij} - f_{io}f_{oj}/n)^2}{f_{io}f_{oj}/n} = n\left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{f_{ij}^2}{f_{io}f_{o}} - 1\right]$$

$$= \chi^2_{(rs-1)-(r+s-2)}$$

$$= \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$ অর্থাৎ $(r-1)(s-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2.

দেখা যাচ্ছে যে, অন্তর্সাম্য বিচার ও নিরপেক্ষতা বিচার প্রশ্নদ্বয় আলাদা হলেও সমাধান মুখ্যতঃ এক, কারণ প্রতিক্ষেত্রেই বিচারাঙ্ক হচ্ছে

$$\chi^2 = \text{সমগ্র পরিসংখ্যা} \times \left[\sum_{i,j} \frac{\text{প্রকোষ্ঠ পরিসংখ্যার বর্গ}}{\text{সারি পরিসংখ্যা} \times \text{স্তম্ভ পরিসংখ্যা}} - 1\right]$$

এবং এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $=$ (সারিসংখ্যা -1)(স্তম্ভসংখ্যা -1)

15.6.4 পরিসংখ্যা χ^2-এর সরলতর রূপ :

বিভিন্ন পরিস্থিতিতে পরিসংখ্যা χ^2-এর সরলতর রূপ নির্ণয় করা যেতে পারে। 15.6 অনুচ্ছেদে কিছু আলোচনা পূর্বেই করা হয়েছে। নীচে তিনটি বিশেষক্ষেত্রে χ^2-এর মান সহজে কীভাবে নির্ণয় করা যায় তা বলা হচ্ছে।

(*i*) ধরলাম দুটিমাত্র শ্রেণীতে নমুনালব্ধ অবেক্ষিত পরিসংখ্যা n_1 ও n_2 মুখ্যপ্রকল্প বিচার করতে হবে যে

H_0 : (শ্রেণীদ্বয়ের পরিসংখ্যা $a : b$ অনুপাতে আছে)

$$\chi^2 = \frac{\left\{n_1 - \frac{a}{a+b}(n_1+n_2)\right\}^2}{\frac{a}{a+b}(n_1+n_2)} + \frac{\left\{n_2 - \frac{b}{a+b}(n_1+n_2)\right\}^2}{\frac{b}{a+b}(n_1+n_2)}$$

$$= \frac{(bn_1 - an_2)^2}{(a+b)\,a(n_1+n_2)} + \frac{(an_2 - bn_1)^2}{(a+b)b\,(n_1+n_2)}$$

$$= \frac{(bn_1 - an_2)^2}{abn},$$ যেখানে $n = n_1 + n_2 =$ সমগ্র পরিসংখ্যা

এই χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা এক।

(*ii*) 15.6.2 ও 15.6.3 অনুচ্ছেদে আলোচিত r ও s-এর মধ্যে একটির মান 2 হলে χ^2-এর মান নীচের সূত্রানুসারে সহজে নির্ণয় করা যায়। ধরলাম $s = 2$। $r \times 2$-দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাস নীচে দেখান হ'ল :

স্তম্ভ / সারি	1	2	যোগফল
1	a_1	b_1	T_1
2	a_2	b_2	T_2
⋮	⋮	⋮	⋮
i	a_i	b_i	T_i
⋮	⋮	⋮	⋮
r	a_r	b_r	T_r
যোগফল	T_a	T_b	n

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\left(a_i - \frac{T_iT_a}{n}\right)^2}{\frac{T_iT_a}{n}} + \frac{\left(b_i - \frac{T_iT_b}{n}\right)^2}{\frac{T_iT_b}{n}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\left(a_i - \frac{T_iT_a}{n}\right)^2}{\frac{T_iT_a}{n}} + \frac{\left(a_i - \frac{T_iT_a}{n}\right)^2}{\frac{T_iT_b}{n}}\right] \quad \text{কারণ} \quad a_i - \frac{T_iT_a}{n} = -\left(b_i - \frac{T_iT_b}{n}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b}\right)\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(a_i - \frac{T_iT_a}{n}\right)^2}{T_i}$$

$$= \frac{n^2}{T_aT_b}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i^2}{T_i} - \frac{T_a^2}{n}\right)$$

অনুরূপভাবে, $\chi^2 = \frac{n^2}{T_aT_b}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i^2}{T_i} - \frac{T_b^2}{n}\right)$

এই χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(r-1)$.

স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে সারি ও স্তম্ভের পরস্পর বিনিময় ঘটিয়ে $r=2$ হলেও অর্থাৎ $2\times s$ দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাসের ক্ষেত্রেও উপরের মতো সহজ নিয়মে χ^2-এর মান নির্ণয় করা যায়।

(*iii*) 2×2 দ্বিধারা সারণীতে χ^2-এর মান আরও সহজে নির্ণয় করা যায়।

ধরলাম 2×2 দ্বিধারা সারণীটি নীচের ন্যায়

স্তম্ভ / সারি	1	2	যোগফল
1	a	b	$a+b$
2	c	d	$c+d$
যোগফল	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$$\chi^2 = \frac{\left\{a-\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c+d}\right\}^2}{\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c+d}}+\frac{\left\{b-\frac{(a+b)(b+d)}{a+b+c+d}\right\}^2}{\frac{(a+b)(b+d)}{a+b+c+d}}$$

$$+\frac{\left\{c-\frac{(c+d)(a+c)}{a+b+c+d}\right\}^2}{\frac{(c+d)(a+c)}{a+b+c+d}}+\frac{\left\{d-\frac{(c+d)(b+d)}{a+b+c+d}\right\}^2}{\frac{(c+d)(b+d)}{a+b+c+d}}$$

$$=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)}\left[\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+d)}+\frac{1}{(c+d)(a+c)}+\frac{1}{(c+d)(b+d)}\right]$$

$$=\frac{(ad-bc)^2(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

এই χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 1.

15.6.5 ইয়েটের অবিচ্ছিন্নতা শুদ্ধি (Yate's continuity correction) :

বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা-বিভাজন থেকে অবিচ্ছিন্ন χ^2 বিভাজন পেতে হলে আমরা পূর্বেই বলেছি যে, কোন শ্রেণীর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা যেন 5-এর চেয়ে কম না হয়। যদি কোন শ্রেণীর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা 5-এর চেয়ে কম হয়, তবে সেই শ্রেণীকে নিকটবর্তী শ্রেণীর সঙ্গে একত্র করতে হবে। স্পষ্টতঃ এই নিয়ম 2×2 শ্রেণীবিন্যাসে প্রযোজ্য নয়।

এরূপ পরিস্থিতিতে ইয়েট একটি উপায়ের কথা বলেছেন। আমরা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের 2×2 দ্বিধারা সারণী গ্রহণ করলাম। যদি $ad < bc$ হয়, তবে a ও d উভয়কে 0·5 বাড়িয়ে এবং b ও c উভয়কে 0·5 কমিয়ে যে 2×2 নতুন দ্বিধারা সারণী হবে তার পরিপ্রেক্ষিতেই χ^2-এর মান নির্ণয় করতে হবে। এতে প্রান্তিক পরিসংখ্যার বা প্রকোষ্ঠ প্রত্যাশিত পরিসংখ্যার কোন পরিবর্তন হবে না। অপরপক্ষে যদি $ad > bc$ হয় তবে a ও d উভয়কে 0·5 কমিয়ে এবং b ও c উভয়কে 0·5 বাড়িয়ে যে 2×2 নতুন দ্বিধারা সারণী হবে তাই গ্রহণ করতে হবে।

এতে χ^2 নিম্নলিখিত রূপ নেবে।

$$\chi^2 = \frac{n\{(a+0.5)(d+0.5)-(b-0.5)(c-0.5)\}^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{n(ad-bc+0.5n)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(c+d)} \quad \text{যদি } ad < bc \text{ হয়}$$

এবং $$\chi^2 = \frac{n\{(a-0.5)(d-0.5)-(b+0.5)(c+0.5)\}^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{n(ad-bc-0.5n)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(a+d)} \quad \text{যদি } ad > bc \text{ হয়।}$$

অর্থাৎ যে কোন ক্ষেত্রে,

$$\chi^2 = \frac{n\{|ad-bc|-0.5n\}^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$ এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 1ই ধরতে হবে।

15.7 উদাহরণমালা :

15.7.1 একজন বিক্রেতা দাবি করেন যে তাঁর জিনিসপত্র অন্ততঃ 80% ত্রুটিশূন্য। তাঁর জিনিসপত্র থেকে 100টি জিনিস পরীক্ষা ক'রে 65টি ত্রুটিশূন্য জিনিস পাওয়া গেল। বিক্রেতার দাবি গ্রহণযোগ্য কিনা বিচার কর।

যদি গ্রহণযোগ্য না হয়, তবে যে কোন একটি জিনিসের ত্রুটিশূন্য হবার সম্ভাবনার 95% আস্থা অন্তরের সীমাদ্বয় নির্ণয় কর।

ধরা যাক পূর্ণকে ত্রুটিশূন্যতার অংশের মান অর্থাৎ একটি জিনিসের ত্রুটিশূন্য হবার সম্ভাবনা P. নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : P = 0.80$

বৈকল্পিক প্রকল্প $H_0 : P < 0.80$.

নমুনাজ ত্রুটিশূন্যতার অংশের মান $P = \frac{65}{100} = 0.65$. ধরা যাক নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ ও সমসম্ভব। নমুনার আয়তন বৃহৎ হওয়ায় মোটামুটিভাবে p-এর ক্রমাসন্ন বিভাজন নর্ম্যাল ধরা যেতে পারে। সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্নভাবে প্রমাণ নর্ম্যাল চল

$$\xi = \frac{p-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

$$= \frac{0.65-0.80}{\sqrt{\frac{0.80(1-0.80)}{100}}} = -3.75^{**}$$

এখন $\xi_{0.95} = -1.645$ ও $\xi_{0.99} = -2.330$.

সুতরাং, 1% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্যপ্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ বিক্রেতার দাবি গ্রহণ করা যায় না।

P-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও ঊর্ধ্ব সীমাদ্বয় যথাক্রমে

$$p-\xi_{.025}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ এবং } p+\xi_{.025}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

অর্থাৎ, $0.65-1.96\sqrt{\frac{0.65(1-0.65)}{100}}$

এবং $0.65+1.96\sqrt{\frac{0.65(1-0.65)}{100}}$

অর্থাৎ 0·6023 এবং 0·6977.

15.7.2 কোন একটি বড় শহরে একটি বিদ্যালয়ের 900 জন ছাত্রের এক সমসম্ভব নমুনায় 20%-এর কোন একটি অঙ্গবৈকল্য দেখা যায়। অপর একটি বড় শহরের ক্ষেত্রে 1200 জনের অনুরূপ একটি নমুনায় 18·5%-এর ঐ একই রূপ অঙ্গবৈকল্য লক্ষিত হয়।

দুটি শহরের ক্ষেত্রে ছাত্রদের অঙ্গবৈকল্যের অংশের পরিমাণের এই যে পার্থক্য তা কি সংশয়াত্মক? সেটি যাই হোক না কেন অংশদ্বয়ের পার্থক্যের 95% ও 99% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

ধরলাম শহর দুটিতে অঙ্গবৈকল্যের অংশদ্বয় যথাক্রমে P_1 ও P_2

মুখ্য প্রকল্প H_0 : $P_1=P_2$ বিচার করতে হবে যেখানে বৈকল্পিক

$$H: P_1 \neq P_2$$

ধরলাম যে পূর্ণক দুটি থেকে নমুনা গ্রহণ করা হয়েছে সে দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ এবং প্রতি শহরের সমসম্ভব নমুনাজ অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

প্রথম নমুনাতে	দ্বিতীয় নমুনাতে
$n_1=900$	$n_2=1200$
$p_1=0.200$	$p_2=0.185$

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী P_1 ও P_2 সমান। ধরলাম এদের সাধারণ মান P,

P-এর বিন্দু প্রাক্কলক $p=\frac{20\times 9+18.5\times 12}{900+1200}=0.191$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$|\xi| = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{0{\cdot}200 - 0{\cdot}185}{\sqrt{0{\cdot}191 \times 0{\cdot}809\left(\frac{1}{900} + \frac{1}{1200}\right)}}$$

$$= 0{\cdot}864$$

এখন $\xi_{.025} = 1{\cdot}96$.

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়, তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ শহর দুটির মধ্যে অঙ্গ-বৈকল্যের যে পার্থক্য দেখা যাচ্ছে তা সংশয়াত্মক নয়।

যাই হোক শহর দুটির অঙ্গবৈকল্যের অংশদ্বয়ের পার্থক্যের অর্থাৎ $(P_1 - P_2)$-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্বসীমাদ্বয়

$$p_1 - p_2 \mp \xi_{.025}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

বা, $0{\cdot}015 \mp 1{\cdot}96 \times 0{\cdot}01735$

বা, $-0{\cdot}0190$ ও $0{\cdot}0490$

$(P_1 - P_2)$-এর 99% আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্বসীমাদ্বয়

$$(p_1 - p_2) \mp \xi_{.005}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

বা, $0{\cdot}015 \mp 2{\cdot}576 \times 0{\cdot}01735$

বা, $-0{\cdot}0319$ ও $0{\cdot}0619$

সুতরাং $(P_1 - P_2)$-এর 95% আস্থা অন্তর $-0{\cdot}0190$ থেকে $0{\cdot}0490$ পর্যন্ত এবং 99% আস্থা অন্তর $-0{\cdot}0319$ থেকে $0{\cdot}0619$ পর্যন্ত।

15.7.3 কোন একটি বড় শহরের যানবাহন চলাচলের ব্যবস্থা পরীক্ষা

করতে গিয়ে দেখা গেল যে, একমাসে মোটর গাড়ীর দুর্ঘটনার সংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ

অঞ্চল	গড়ে প্রতিদিনের দুর্ঘটনার সংখ্যা
উত্তর	17
দক্ষিণ	10
পূর্ব	13
পশ্চিম	12
মধ্য	14

তুমি কি মনে কর যে যানবাহন সংক্রান্ত দুর্ঘটনার সমস্যা 5টি অঞ্চলে একইরূপ ?

কাজের সুবিধার জন্য উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব, পশ্চিম ও মধ্য অঞ্চলগুলিকে 1, 2, 3, 4 ও 5 নম্বর দেওয়া হ'ল। ধরলাম i-তম স্থানে j-তম দিনে দুর্ঘটনার সংখ্যা x_{ij}, যেখানে $i=1, 2, 3, 4$ ও 5 এবং $j=1, 2, \ldots, 30$। x_{ij}-কে একটি পোয়াসঁ চল ধরা যায় যার পূর্ণকাঙ্ক λ_i।

সুতরাং $\sum_{j=1}^{30} x_{ij}$ একটি পোয়াসঁ চল যার পূর্ণকাঙ্ক $30\lambda_i$

নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5)$

বৈকল্পিক প্রকল্প $H :$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ও λ_5 সকলে সমান নয়।

মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ও λ_5-এর সাধারণ মান λ-এর

বিন্দু প্রাক্কলক $\hat{\lambda} = \bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{30} x_{ij} \Big/ 150 = \sum_{i=}^{5} \bar{x}_i \Big/ 5$

$$= \frac{17+10+13+12+14}{5} = 13{\cdot}2$$

এখন মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্নভাবে

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{30} \left(x_{ij} - 30\hat{\lambda}\right)^2}{30\hat{\lambda}}$$

$$= \frac{30 \sum_{i=1}^{5} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{\bar{\bar{x}}}$$

$$= \frac{30}{\bar{\bar{x}}} \left(\sum_{i=1}^{5} \bar{x}_i^2 - 5\bar{\bar{x}}^2 \right)$$

$$= \frac{30}{13 \cdot 2} (17^2 + 10^2 + 13^2 + 12^2 + 14^2 - 5 \times 13 \cdot 2^2)$$

$= 60{\cdot}909^{**}$, স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 4

এখন $\chi^2_{.05,\,4} = 9{\cdot}488$ এবং $\chi^2_{.01,\,4} = 13{\cdot}277$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় χ^2 এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ 5টি বিভিন্ন অঞ্চলে যানবাহন চলাচলের দুর্ঘটনাজনিত সমস্যা একই প্রকার মনে করার পেছনে বিশেষ কোন যুক্তি নেই।

15.7.4 841 জন 13 বৎসর বয়স্ক বালকের নমুনা থেকে তাদের গড় উচ্চতা ও প্রমাণ বিচ্যুতি পাওয়া গেল যথাক্রমে 140 সে.মি. ও 7 সে.মি.। আবার 784 জন সমবয়স্কা মেয়েদের নমুনা থেকে গড় উচ্চতা ও প্রমাণ-বিচ্যুতি পাওয়া গেল যথাক্রমে 145 সে.মি. ও 6 সে.মি.।

এথেকে কি মনে হয় যে ঐ বয়সে

(i) বালিকারা গড়ে বালকদের চেয়ে বেশী লম্বা।

(ii) বালক ও বালিকাদের উচ্চতার প্রমাণ-বিচ্যুতি সমান।

ধরলাম 13 বৎসর বয়সের বালকদের গড় উচ্চতা μ_1 ও প্রমাণ বিচ্যুতি σ_1 এবং ঐ একই বয়সের বালিকাদের গড় উচ্চতা μ_2 ও প্রমাণ বিচ্যুতি σ_2। নীচের প্রকল্প দুটি বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \mu_1 < \mu_2$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \sigma_1 \neq \sigma_2$

বালকদের নমুনায়	বালিকাদের নমুনায়
$n_1 = 841$	$n_2 = 784$
$\bar{x}_1 = 140$	$\bar{x}_2 = 145$
$s_1 = 7$	$s_2 = 6$

$$s = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}} = 6{\cdot}5368$$

প্রথম মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চল

$$\xi = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$
$$= \frac{140 - 145}{\sqrt{7^2/841 + 6^2/784}}$$
$$= -15{\cdot}99^{**}$$

এখন $\xi_{.95} = -1{\cdot}645$ এবং $\xi_{.99} = -2{\cdot}330$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ 13 বৎসর বয়সে বালিকারা গড়ে বালকদের চেয়ে বেশী লম্বা হয়—এমন বলা চলে।

দ্বিতীয় মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$|\xi| = \frac{|s_1 - s_2|}{S\sqrt{1/2n_1 + 1/2n_2}}$$
$$= \frac{7-6}{6{\cdot}5368\sqrt{1/(2\times 841) + 1/(2\times 784)}}$$
$$= 0{\cdot}4359$$

এখন $\xi_{.025} = 1{\cdot}96$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ 13 বৎসর বয়সের বালক ও বালিকাদের উচ্চতার প্রমাণ বিচ্যুতি সমান না ধরার বিশেষ কোন যুক্তি নেই।

15.7.5 900 আয়তনের এক সমসম্ভব নমুনাতে দেখা গেল

$$g_1 = \sqrt{b_1} = 0{\cdot}111$$
$$g_2 = b_2 - 3 = 0{\cdot}245$$

এ থেকে পরীক্ষা ক'রে দেখ পূর্ণকের বিভাজনকে নর্ম্যাল গোত্রীয় বলা চলে কি না।

নীচের মুখ্য প্রকল্প দুটি বিচার করতে হবে :

(i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \gamma_1$ বা $\sqrt{\beta_1} = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \gamma_1 \neq 0$

(ii) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \gamma_2$ বা $\beta_2 - 3 = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \gamma_2 \neq 0$

কারণ নর্ম্যাল পূর্ণকে $\gamma_1 = 0$ এবং $\gamma_2 = 0$

প্রথম ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$|\xi| = \frac{|g_1|}{\sqrt{6/n}}$$

$$= \frac{0\cdot111\sqrt{900}}{\sqrt{6}}$$

$$= 1\cdot362$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী পুনরায় বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$|\xi| = \frac{|g_2|}{\sqrt{24/n}}$$

$$= \frac{0\cdot245\sqrt{900}}{\sqrt{24}}$$

$$= 1\cdot503$$

এন, $\xi_{\cdot025} = 1\cdot96$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় দুটি ক্ষেত্রেই ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প দুটি গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ পূর্ণকটিকে নর্ম্যাল ব'লে ধরা চলে।

15.7.6 900 জোড়া অবেক্ষণের এক সমসম্ভব নমুনা থেকে সহগাঙ্ক হিসাব ক'রে পাওয়া গেল 0'35. এ থেকে পূর্ণকে চলদ্বয়ের মধ্যে কোন সহগতির আভাস পাওয়া যায় কি? যদি পাওয়া যায় তবে পূর্ণকের সহগাঙ্কের 95% আস্থা সীমাদ্বয় নির্ণয় কর।

ধরলাম দ্বিচল নর্ম্যাল বিভাজন থেকে সংগৃহীত 900 আয়তনের সমসম্ভব নমুনার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। পূর্ণকে সহগাঙ্ক ρ হলে নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho = 0$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \rho \neq 0$

নমুনায়তন $n = 900$ এবং নমুনাজ সহগাঙ্ক $r = 0\cdot35$

সুতরাং বৃহৎ নমুনাভিত্তিক প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$|\xi| = |r|\sqrt{n}$$
$$= 0\cdot35\sqrt{900}$$
$$= 10\cdot5^{**}$$

এখন, $\xi_{\cdot025} = 1\cdot96$ ও $\xi_{\cdot005} = 2\cdot576$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্যপ্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ পূর্ণকে চলদুটির মধ্যে যে সহগতি রয়েছে তার আভাস পাওয়া যায়।

পূর্ণকে সহগাঙ্ক ρ-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও ঊর্ধ্ব সীমাদ্বয়

$$r \mp \xi_{\cdot025}\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

অর্থাৎ $0\cdot35 \mp 1\cdot96\dfrac{1-0\cdot35^2}{\sqrt{900}}$

অর্থাৎ 0·2927 ও 0·4073.

15.7.7 100 আয়তনের এক সমসম্ভব নমুনা থেকে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·75। পূর্ণকে অনুরূপ সহগাঙ্ক 0·50 ধরা যায় কি? তা না হলে পূর্ণকের সহগাঙ্কের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

90 আয়তনের অপর একটি সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·70। পূর্ণক দুটিতে সহগাঙ্কের কোন পার্থক্য আছে কি?

80 জোড়া আয়তনের আরও একটি সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·60। এখন বিচার করে দেখ, তিনটি পূর্ণকের সহগাঙ্কগুলি সমান বলা চলে কিনা।

যদি সমান বলা চলে, তবে পূর্ণকের সেই সাধারণ সহগাঙ্কের বিন্দু প্রাক্‌কলক ও 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

ধরলাম সমসম্ভব নমুনাজ অবেক্ষণগুলি প্রতি ক্ষেত্রেই পরস্পর নিরপেক্ষ। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্ষেত্রে পূর্ণকের সহগাঙ্কগুলিকে যথাক্রমে ρ_1, ρ_2 ও ρ_3 এবং নমুনাজ সহগাঙ্কগুলিকে যথাক্রমে r_1, r_2 ও r_3 দ্বারা সূচিত করলাম।

প্রথমতঃ মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \rho_1 = 0\cdot50$ বিচার করতে হবে যেখানে বৈকল্পিক প্রকল্প হচ্ছে $H_0 : \rho_1 \neq 0\cdot50$.

এখানে $n_1 = 100$, $r_1 = 0\cdot75$, $z_1 = \tanh^{-1} r_1 = 0\cdot9730$

$$\zeta_1{}^0 = \tanh^{-1}\rho_1 = \tanh^{-1} 0\cdot50 = 0\cdot5493$$

সুতরাং মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্ন প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$
\begin{aligned}
|\xi| &= \sqrt{n-3}\,|z_1-\zeta_1{}^0| \\
&= \sqrt{100-3}\,(0\text{·}9730-0\text{·}5493) \\
&= 4\text{·}1730^{**}
\end{aligned}
$$

এখন $\xi_{.025}=1\text{·}96$ এবং $\xi_{.005}=2\text{·}576$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ পূর্ণকে সহগাঙ্ক 0·5 ধরা ঠিক হবে না।

ζ-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্ব সীমাদ্বয়

অর্থাৎ $z_1 \mp \xi_{.025}\dfrac{1}{\sqrt{n_1-3}}$

অর্থাৎ $0\text{·}9730 \mp 1\text{·}96\dfrac{1}{\sqrt{100-3}}$

অর্থাৎ 0·7741 ও 1·1719.

সুতরাং ρ-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও উর্ধ্ব সীমাদ্বয় যথাক্রমে

tanh 0·7741 ও tanh 1·1719

বা, 0·650 ও 0·825.

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প $H_0: \rho_1=\rho_2$ বিচার করতে হবে যেখানে বৈকল্পিক প্রকল্প হচ্ছে $H_0: \rho_1 \neq \rho_2$.

$$n_2=90,\quad r_2=0\text{·}70,\quad z_2=\tanh^{-1}r_2=0\text{·}8673$$

এখন মুখ্য প্রকল্পানুযায়ী আসন্ন প্রমাণ নর্ম্যাল চলের চিহ্ন নিরপেক্ষ মান

$$
\begin{aligned}
|\xi| &= \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1-3}+\dfrac{1}{n_2-3}}} \\
&= \frac{0\text{·}9730-0\text{·}8673}{\sqrt{\dfrac{1}{100-3}+\dfrac{1}{90-3}}} \\
&= 0\text{·}7161
\end{aligned}
$$

5% সংশয়মাত্রায় ξ-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য, অর্থাৎ পূর্ণকে সহগাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে কোন পার্থক্য আছে বলে মনে হয় না।

তারপর তৃতীয় ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প $H_0 : (\rho_1 = \rho_2 = \rho_3)$ বিচার করতে হবে যেখানে বৈকল্পিক প্রকল্প হচ্ছে $H : (\rho_1, \rho_2$ ও ρ_3 সকলে সমান নয়)

$n_3 = 80$ $\quad r_3 = 0.60$ $\quad z_3 = \tanh^{-1} r_3 = 0.6931$

n	$n-3$	r	z	$(n-3)z$	$(n-3)z^2$
100	97	0·75	0·9730	94·3810	91·8327
90	87	0·70	0·8673	75·4551	65·4422
80	77	0·60	0·6931	53·3687	36·9898
যোগফল	261			223·2048	194·2647

আসন্ন $\chi^2 = 194{\cdot}2647 - \dfrac{223{\cdot}2048^2}{261} = 3{\cdot}380\,0$

এখন $\chi^2_{.05,\,2} = 5{\cdot}991$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য-প্রকল্প গ্রহণযোগ্য, অর্থাৎ তিনটি পূর্ণকের সহগাঙ্ক সমান বলা চলে।

তিনটি পূর্ণকের সাধারণ সহগাঙ্ক যদি ρ হয়, তবে ধরলাম

$$\zeta = \tanh^{-1} \rho$$

এখন, ζ-এর বিন্দু প্রাক্কলক $\bar{z} = \sum_{i=1}^{3} (n_i - 3) z_i \div \sum_{i=1}^{3} (n_i - 3)$

$$= 223{\cdot}2048 \div 261$$

$$= 0{\cdot}8552$$

সুতরাং ρ-এর বিন্দু প্রাক্কলক $\tanh 0{\cdot}8552 = 0{\cdot}6938$

ζ-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয়

$$\bar{z} \mp \xi_{.025} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} (n_i - 3)}}$$

অর্থাৎ $0·8552 \mp 1·96/261$

বা $0·8477$ ও $0·8627$

সুতরাং ρ-এর 95% আস্থা অন্তরের অধঃ ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমাদ্বয়

$$\tanh 0·8477 \text{ ও } \tanh 0·8627$$

অর্থাৎ $0·6898$ ও $0·6976$

অর্থাৎ ρ-এর 95% আস্থা অন্তর 0·6898 থেকে 0·6976 পর্যন্ত।

15.7.8. চারজন বিক্রেতা A, B, C ও D জিনিসপত্র যোগান দেয়। তাদের জিনিসপত্র থেকে বিভিন্ন আয়তনের সমসম্ভব নমুনা পরীক্ষা ক'রে যে-সব ত্রুটিপূর্ণ জিনিস পাওয়া গেল তার তালিকা নীচে দেওয়া হ'ল।

ত্রুটিপূর্ণ মালের হিসাব

বিক্রেতা	A	B	C	D
নমুনায়তন	100	200	150	250
ত্রুটিপূর্ণ মালের সংখ্যা	20	35	37	43

তুমি কি মনে কর যে, বিভিন্ন বিক্রেতার জিনিসের মধ্যে গুণের দিক থেকে সত্যিকারের কোন পার্থক্য নেই ?

ধরলাম প্রতি বিক্রেতার ক্ষেত্রে নমুনাজ অবেক্ষণসমূহ পরস্পর নিরপেক্ষ ও সমসম্ভব। বিভিন্ন বিক্রেতার ক্ষেত্রে জিনিসের ত্রুটিপূর্ণ হবার (বা না হবার) সম্ভাবনা সমান কিনা দেখতে হবে। তাই নীচের প্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্য প্রকল্প H_0 : (পূর্ণকে ত্রুটিপূর্ণ ও ত্রুটিশূন্য মালের শ্রেণীদ্বয়ে পরিসংখ্যা বিভাজন A, B, C ও D-র ক্ষেত্রে একই রূপ)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (উল্লিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনগুলি একরূপ নয়)

বিক্রেতা	ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সংখ্যা	ত্রুটিশূন্য দ্রব্যের সংখ্যা	যোগফল
A	20	80	100
B	35	165	200
C	37	113	150
D	43	207	250
যোগফল	135	565	700

$$\chi^2 = \frac{700^2}{135 \times 565}\left[\frac{20^2}{100}+\frac{35^2}{200}+\frac{37^2}{150}+\frac{43^2}{250}-\frac{135^2}{700}\right]$$

$= 3\text{·}906$, স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 3

এখন $\chi^2_{.05,\,3} = 7\text{·}814$

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প গ্রহণযোগ্য, অর্থাৎ বিভিন্ন প্রকার বিক্রেতার মধ্যে জিনিসের গুণের দিক থেকে সত্যিকারের কোন পার্থক্য আছে ব'লে মনে হয় না।

15.7.9 একটি বিদ্যালয়ে কোন একটি শ্রেণীতে দুটি বিভাগ ক ও খ-তে যথাক্রমে 120 জন ও 100 জন ছাত্র আছে। ষাণ্মাসিক ও বাৎসরিক পরীক্ষার দিক থেকে এবং কৃতকার্যতা ও অকৃতকার্যতার দিক থেকে উভয় বিভাগের দ্বিধারা শ্রেণীবিন্যাস নীচে দেখান হয়েছে।

ক-বিভাগ

		ষাণ্মাসিক	
		কৃতকার্য	অকৃতকার্য
বাৎসরিক	কৃতকার্য	48	12
	অকৃতকার্য	8	52

খ-বিভাগ

		ষাণ্মাসিক	
		কৃতকার্য	অকৃতকার্য
বাৎসরিক	কৃতকার্য	21	8
	অকৃতকার্য	3	68

প্রতি বিভাগের জন্য ষাণ্মাসিক পরীক্ষার ফলাফলের সঙ্গে বাৎসরিক পরীক্ষার ফলাফলের কোন সংশ্রব আছে কিনা বিচার কর।

উভয় বিভাগের ছেলেদের একই পূর্ণক থেকে সংগৃহীত সমসম্ভব নমুনা ব'লে ধরা যায় কিনা তাও বিচার কর।

ধরলাম প্রতি বিভাগের অন্তর্গত ছাত্ররা অনুরূপ অসীম পূর্ণক থেকে সংগৃহীত পরস্পর নিরপেক্ষ ও সমসম্ভব। উভয় বিভাগেই দুটি গুণলক্ষণের দিক থেকে সমুদয় ছাত্রকে ভাগ করা হয়েছে, যথা ষাণ্মাসিক পরীক্ষা ও বাৎসরিক পরীক্ষা। প্রথম গুণলক্ষণ ষাণ্মাসিক পরীক্ষার দুটি রূপ কৃতকার্যতা ও অকৃতকার্যতা নেওয়া হয়েছে। দ্বিতীয় গুণলক্ষণ বাৎসরিক পরীক্ষারও দুটি রূপ কৃতকার্যতা ও অকৃত-কার্যতা নেওয়া হয়েছে। এখন প্রথমতঃ দুটি প্রকল্প বিচার করতে হবে।

(i) মুখ্য প্রকল্প H_0 : (ক বিভাগে গুণলক্ষণদ্বয় পরস্পর নিরপেক্ষ)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (ক বিভাগে গুণলক্ষণদ্বয় পরস্পর নিরপেক্ষ নয়)

(ii) মুখ্য প্রকল্প H_0 : (খ বিভাগে গুণলক্ষণদ্বয় পরস্পর নিরপেক্ষ)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (খ বিভাগে গুণলক্ষদ্বয় পরস্পর নিরপেক্ষ নয়)

প্রথমক্ষেত্রে $\chi^2 = \dfrac{(48 \times 52 - 8 \times 12)^2 (48 + 12 + 8 + 52)}{(48 + 12)(8 + 52)(48 + 8)(12 + 52)}$

$= 53{\cdot}37^{**}$, স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 1.

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে ইয়েটের অবিচ্ছিন্নতা শুদ্ধি প্রয়োগ ক'রে (কারণ একটি প্রকোষ্ঠে ঔপপত্তিক পরিসংখ্যা বেশ কম, যদিও তা 5-এর চেয়ে কম নয়)

$$\chi^2 = \frac{\{|21 \times 68 - 8 \times 3| - \frac{100}{2}\}^2 (21 + 8 + 3 + 68)}{(21 + 8)(3 + 68)(21 + 3)(6 + 68)}$$

$= 48{\cdot}8158^{**}$, স্বাতন্ত্র্য মাত্রা 1.

এখন $\chi^2_{.05,\,1} = 3{,}841$ ও $\chi^2_{.01,\,1} = 6{\cdot}635$.

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান উভয়ক্ষেত্রেই সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় দুটি মুখ্য প্রকল্পের কোনটিই গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ উভয় বিভাগেই ষাণ্মাসিক পরীক্ষা ও বাৎসরিক পরীক্ষার ফলাফলের মধ্যে বেশ সংস্রব আছে ব'লে মনে হয়।

এবারে উভয় বিভাগের ছাত্রদের 4টি শ্রেণীতে ভাগ করা হয়েছে, যথা—

(i) ষাণ্মাসিক ও বাৎসরিক উভয় পরীক্ষায় কৃতকার্য ;

(ii) ষাণ্মাষিক পরীক্ষায় অকৃতকার্য কিন্তু বাৎসরিক পরীক্ষায় কৃতকার্য ;

(iii) ষাণ্মাসিক পরীক্ষায় কৃতকার্য কিন্তু বাৎসরিক পরীক্ষায় অকৃতকার্য ;

(iv) ষাণ্মাসিক ও বাৎসরিক উভয় পরীক্ষায় অকৃতকার্য।

এখন নীচের মুখ্যপ্রকল্পটি বিচার করতে হবে।

মুখ্যপ্রকল্প H_0 : (ক ও খ বিভাগের পূর্ণকে উপরিলিখিত 4টি শ্রেণীতে পরিসংখ্যা বিভাজন সমান)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (উল্লিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন দুটি সমান নয়)

ফলাফল / বিভাগ	ষাণ্মাষিক ও বাৎসরিক উভয় পরীক্ষায় কৃতকার্য	ষাণ্মাষিক পরীক্ষায় অকৃতকার্য কিন্তু বাৎসরিক পরীক্ষায় কৃতকার্য	ষাণ্মাষিক পরীক্ষায় কৃতকার্য কিন্তু বাৎসরিক পরীক্ষায় অকৃতকার্য	ষাণ্মাষিক ও বাৎসরিক উভয় পরীক্ষায় অকৃতকার্য	যোগফল
ক	48	12	8	52	120
খ	21	8	3	68	100
যোগফল	69	20	11	120	220

$$\chi^2 = \frac{220^2}{120 \times 100}\left[\frac{48^2}{69} + \frac{12^2}{20} + \frac{8^2}{11} + \frac{52^2}{120} - \frac{120^2}{220}\right]$$

$= 14{\cdot}0694^{**}$, স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 3

$\chi^2_{.05,3} = 7{\cdot}81473$ ও $\chi^2_{.01,3} = 11{\cdot}3449$.

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রায় χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক। তাই এই সংশয়মাত্রায় মুখ্যপ্রকল্প গ্রহণযোগ্য নয়, অর্থাৎ ক ও খ বিভাগ দুটিকে একই পূর্ণক থেকে সংগৃহীত সমসম্ভব নমুনা ব'লে মনে করা সঙ্গত হবে না.।

15.7.10 মটরদানা নিয়ে পরীক্ষা করতে গিয়ে গ্রেগর মেণ্ডেল (Gregor Mendel) কয়েকটি চারাগাছের মটরদানার চেহারা ও রং লক্ষ্য করেছিলেন। তিনি যেটা দেখেছিলেন সেটা নীচে দেওয়া হচ্ছে

মটরদানার চেহারা ও রং	সংখ্যা
গোল হলুদ	315
গোল সবুজ	108
তেরচা হলুদ	101
তেরচা সবুজ	32

মেণ্ডেলের বংশগত মতবাদ অনুযায়ী নীচের প্রকল্পগুলি বিচার কর :

(i) গোল : তেরচা = 3 : 1 ;

(ii) হলুদ : সবুজ = 3 : 1 ;

(iii) গোল হলুদ : গোল সবুজ : তেরচা হলুদ : তেরচা সবুজ = 9 : 3 : 3 : 1.

ধরলাম, যাবতীয় মটরদানার পূর্ণক থেকে 556টি মটরদানার সমসম্ভব নমুনা সংগৃহীত হয়েছে এবং নমুনার অবেক্ষণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ।

নীচের প্রকল্পগুলি বিচার করতে হবে :

(*i*) মুখ্য প্রকল্প H_0 : (গোল : তেরচা = 3 : 1)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (গোল : তেরচা ≠ 3 : 1)

(*ii*) মুখ্য প্রকল্প H_0 : (হলুদ : সবুজ = 3 : 1)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (হলুদ : সবুজ ≠ 3 : 1)

(*iii*) মুখ্য প্রকল্প H_0 : (গোল হলুদ : গোল সবুজ : তেরচা হলুদ : তেরচা সবুজ = 9 : 3 : 3 : 1)

বৈকল্পিক প্রকল্প H : (গোল হলুদ : গোল সবুজ : তেরচা হলুদ : তেরচা সবুজ ≠ 9 : 3 : 3 : 1)

প্রথম ক্ষেত্রে

	গোল মটরদানা	তেরচা মটরদানা	মোট
অবেক্ষিত পরিসংখ্যা	423	133	556
প্রত্যাশিত অনুপাত	3	1	

সুতরাং
$$\chi^2 = \frac{(423 \times 1 - 133 \times 3)^2}{3 \times 1 \times 556}$$
$$= 0{\cdot}3453, \text{ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা } 1.$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

	হলুদ মটরদানা	সবুজ মটরদানা	মোট
অবেক্ষিত পরিসংখ্যা	416	140	556
প্রত্যাশিত অনুপাত	3	1	

সুতরাং
$$\chi^2 = \frac{(416 \times 1 - 140 \times 3)^2}{3 \times 1 \times 556}$$
$$= 0{\cdot}0096, \text{ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা } 1.$$

তৃতীয় ক্ষেত্রে

	গোল হলুদ	গোল সবুজ	তেরচা হলুদ	তেরচা সবুজ	মোট
অবেক্ষিত পরিসংখ্যা	315	108	101	32	556
প্রত্যাশিত অনুপাত	9	3	3	1	
প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা	312·75	104·25	104·25	34·75	556
(অবেক্ষিত পরিসংখ্যা) —(প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা)	2·25	3·75	− 3·25	− 2·75	0

$$\chi^2=\frac{2\cdot25^2}{312\cdot75}+\frac{3\cdot75^2}{104\cdot25}+\frac{3\cdot25^2}{104\cdot25}+\frac{2\cdot75^2}{34\cdot75}$$

$=0\cdot4699$, স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 3

এখন $\chi^2_{.05,1}=3\cdot84146$ এবং $\chi^2_{.05,3}=7\cdot81473$.

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায় χ^2-এর নমুনালব্ধ অবেক্ষিত মান সংশয়াত্মক নয়। তাই এই সংশয়মাত্রায় তিনটি মুখ্য প্রকল্পই গ্রহণযোগ্য অর্থাৎ মেণ্ডেলের বংশগত মতবাদ অনুসারে গোল : তেরচা = 3 : 1, হলুদ : সবুজ = 3 : 1 এবং গোল হলুদ : গোল সবুজ : তেরচা হলুদ : তেরচা সবুজ = 9 : 3 : 3 : 1 ধরা চলে।

অনুশীলনী

15.1 অনুমান তত্ত্বের দিক থেকে বৃহৎ নমুনার প্রয়োজনীয়তা কি?

15.2 যদি n আয়তনের পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনার গড় m_1', r মাত্রার গড়কেন্দ্রিক পরিঘাত m_r এবং পূর্ণকের এই মাত্রার গড়কেন্দ্রিক পরিঘাত μ_r হয়, তবে প্রমাণ কর যে নীচের সম্বন্ধ আসন্নভাবে $0\left(\frac{1}{n}\right)$ পর্যন্ত শুদ্ধ :

$$\text{cov}\,(m_1', m_r)=\frac{1}{n}(\mu_{r+1}-r\mu_2\mu_{r-1})$$

এর থেকে দেখাও যে, কোন প্রতিসম বিভাজনের ক্ষেত্রে নমুনাজ গড় ও যে-কোন জোড় মাত্রার নমুনাজ গড়কেন্দ্রিক পরিঘাতের মধ্যে সহগাঙ্ক আসন্নভাবে শূন্য।

15.3 $\sin^{-1}\sqrt{p}$, $\sqrt{x}$, $\log s$ ও z রূপান্তরের বিষয়ে যাহা জান লেখ।

15.4 পরিসংখ্যা χ^2 কাকে বলে? বিভিন্ন প্রকল্প বিচারে এর আবশ্যকতার আলোচনা কর।

15.5 স্বীকরণ উল্লেখপূর্বক দেখাও যে, আসন্নভাবে

$$E(xy)=E(x)\,E(y)$$

$$E\left(\frac{x}{y}\right)=E(x)/E(y),\ \text{যদি}\ E(y)\text{-এর মান 0 না হয়,}$$

$$V(xy)=E^2(x)\,E^2(y)\left[\frac{V(x)}{E^2(x)}+\frac{V(y)}{E^2(y)}+\frac{2\,\text{cov}\,(x,y)}{E(x)\,E(y)}\right]$$

$$V\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{E^2(x)}{E^2(y)}\left[\frac{V(x)}{E^2(x)}+\frac{V(y)}{E^2(y)}-\frac{2\text{cov}\,(x,y)}{E(x)\,E(y)}\right].$$

15.6 ধর একটি পূর্ণককে কোনও ধর্মানুসারে k-সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়েছে এবং বিভিন্ন শ্রেণীতে অংশগুলির মান $P_1, P_2, \cdots, P_k \left(\sum_{i=1}^{k} P_i = 1\right)$. এই পূর্ণক থেকে যদি n আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয় এবং অবেক্ষণগুলি যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয় এবং নমুনাতে বিভিন্ন শ্রেণীর পরিসংখ্যাগুলি যদি যথাক্রমে $n_1, n_2, \cdots, n_k \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, আসন্নভাবে

$$V\phi(n_1, n_2, \cdots, n_k) = n\left[\sum_{i=1}^{k} P_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial n_i}\right)_E^2 - \left\{\sum_{i=1}^{k} P_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial n_i}\right)_E\right\}^2\right]$$

এবং $\operatorname{cov}\{\phi(n_1, n_2, \cdots, n_k), \psi(n_1, n_2, \cdots, n_k)\}$

$$= n\left[\sum_{i=1}^{k} P_i\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial n_i}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_i}\right)\right\}_E - \left\{\sum_{i=1}^{k} P_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial n_i}\right)_E\right\}\left\{\sum_{i=1}^{k} P_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_i}\right)_E\right\}\right].$$

15.7 ধর k-সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ দ্বিপদ পূর্ণক থেকে $n_1, n_2, \cdots, n_k$ আয়তনের (সমস্ত n_i মোটামুটি বৃহৎ) পরস্পর নিরপেক্ষ অবেক্ষণযুক্ত সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয়েছে। কোন গুণের দিক থেকে নমুনালব্ধ অংশগুলির মান যেন $p_1, p_2, \cdots, p_k$। পূর্ণকে অনুরূপ অংশগুলির মানের সমতা কীভাবে বিচার করবে তা আলোচনা কর। যদি তারা সমান হয়, তবে তাদের সাধারণ মানের বিন্দু-প্রাক্কলনী মাপ ও $100\alpha\%$ আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

15.8 একটি মুদ্রা পক্ষপাতশূন্য কি না বিচার করতে গিয়ে তুমি দেখলে যে তাকে 200 বার সাবধানে উপর দিকে নিক্ষেপ করলে 125 বার অশোকস্তম্ভ চিহ্ন উপর দিকে থাকছে। মুদ্রাটির সম্বন্ধে তুমি কি মন্তব্য করবে?

15.9 ছাপার কাজ জানা 4 জন লোক A, B, C ও D একজন প্রকাশককে তাঁদের দ্বারা প্রস্তুত যথাক্রমে 20, 12, 14 ও 15 পাতার 4 খানা পুস্তিকা দিলেন। প্রতি পুস্তিকায় প্রতি পাতায় মোট শব্দের সংখ্যা প্রায় সমান। দেখা গেল পুস্তিকাগুলিতে যথাক্রমে 51, 32, 28 ও 34টি ছাপার ভুল আছে। ছাপার কাজের দিক থেকে 4 জন লোককে কি তুমি সমদক্ষ মনে কর?

15.10 চালানী জিনিসের বিরাট ঝাঁকা থেকে 250টি আপেলের মধ্যে 30টি পাওয়া গেল খারাপ, বেশী দামের অপর একটি বড় ঝাঁকা থেকে 300টি আপেলের

মধ্যে খারাপ পাওয়া গেল 25টি। দ্বিতীয় ঝাঁকা আপেলের দাম বেশী হওয়া উচিত ব'লে তুমি মনে কর কি?

15.11 ওল্ড (Wold)-এর প্রমাণ নর্ম্যাল চলের সমসম্ভব মান সারণী থেকে চল x-এর প্রথম 500টি মান নিয়ে নীচের তথ্য পাওয়া গেল

$\Sigma x = -23{\cdot}72,\ \Sigma x^2 = 435{\cdot}634$

তুমি কি মনে কর যে 0 থেকে গড়ের মানের যে পার্থক্য তা সংশয়াত্মক?

15.12 1401 জোড়া ভাই-বোন নিয়ে ফিশার বোনের উচ্চতার চেয়ে ভাই-এর উচ্চতার আধিক্যের গড় পেয়েছিলেন 4·895 ইঞ্চি এবং প্রমাণ বিচ্যুতি পেয়েছিলেন 6·548 ইঞ্চি।

পরীক্ষা ক'রে দেখ বোনের চেয়ে ভাই-এর উচ্চতার আধিক্য (i) 4 ইঞ্চি কি না (ii) 4 ইঞ্চির বেশী কি না?

এই আধিক্যের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

15.13 1970 ও 1971 সনে কোনও একটি শহরের চাকুরীরত লোকদের গড় আয় বের করতে গিয়ে 2টি, যথাক্রমে 1610 ও 1423 আয়তনের, সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল। নমুনায় আয়ের যে গড় ও প্রমাণ বিচ্যুতি পাওয়া গেল তা নীচে দেখান হ'ল। দুই বৎসরের গড় আয়ের মধ্যে সত্যিকারের কোন পার্থক্য আছে কি?

বৎসর	নমুনার আয়তন	গড় আয় (টাকা)	প্রমাণ বিচ্যুতি (টাকা)
1970	1610	251	18·2
1971	1423	266	20·4

15.14 বেসরকারী এক চিকিৎসালয়ে একজন মনস্তত্ত্ববিদ্ মন্তব্য করলেন যে মাথাধরার রোগীদের প্রায় 40%-এর রোগ শুধু মনগড়া। তাঁর সহকর্মীরা একথা পরীক্ষা করার উদ্দেশ্যে ময়দা ও জল মিশিয়ে ছোট ছোট বড়ি তৈরী ক'রে প্রচার করলেন যে, ওটা মাথাধরার এক নতুন ওষুধ। চিকিৎসালয়ের সমস্ত রোগীদের ঐ ওষুধ খেতে দিয়ে তাদের কাছ থেকে মন্তব্য চাওয়া হ'ল। তাদের মন্তব্য নীচে শ্রেণীবিন্যস্ত করা হ'ল।

মন্তব্য	রোগীর সংখ্যা
(i) অ্যাসপিরিন থেকে ভাল	8
(ii) অ্যাসপিরিনের মতো	3
(iii) অ্যাসপিরিনের মতো অত ভাল নয়	1
(iv) বাজে	29

(অ্যাসপিরিন এতদিনের প্রচলিত মাথাধরার একটি নামকরা ওষুধ) চিকিৎসকগণ কিছুটা আশ্চর্যান্বিত হলেও তাঁরা বললেন যে, মনস্তত্ত্ববিদ্ অতিরঞ্জিত ক'রে বলেছেন। তাঁদের এ কথা বলার কি সঙ্গত কোন কারণ দেখতে পাও ?

15.15 20 জন ছেলের এক সমসম্ভব নমুনায় A ও B দুটি চলের মধ্যে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·65. পূর্ণকের সহগাঙ্ক 0·50 হতে পারে কি ? যাই হোক অনুরূপ পূর্ণকাঙ্কের 95% আস্থা অন্তর নির্দেশ কর।

অপর একটি 30 জন ছেলের সমসম্ভব নমুনায় A ও B চল দুটির মধ্যে সহগাঙ্ক পাওয়া গেল 0·50। দুটি ক্ষেত্রের সহগাঙ্কের মধ্যে কোন পার্থক্য আছে ব'লে তোমার মনে হয় কি ?

15.16 দ্বিচল নর্ম্যাল বিভাজন থেকে নেওয়া 3 দল অবেক্ষণের জন্য নিম্নলিখিত সহগাঙ্কগুলি পাওয়া গেল

ক্রমিক সংখ্যা	1	2	3
নমুনায়তন	35	40	25
সহগাঙ্ক	0·62	0·45	0·70

বিচার ক'রে দেখ নমুনাগুলি একই সহগাঙ্কযুক্ত পূর্ণক থেকে নেওয়া হয়েছে কি না।

যাই হোক না কেন পূর্ণকের সহগাঙ্কগুলি এক ধ'রে নিয়ে তার বিন্দু প্রাক্কলনী মাপ ও 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

15.17 কোন এক সমসম্ভব সংখ্যা সারণী (random number table) থেকে 0 হতে 9 পর্যন্ত 200টি অঙ্ক নেওয়া হ'ল এবং অঙ্কগুলির পরিসংখ্যা যা পাওয়া গেল তা নীচে দেওয়া হ'ল।

অঙ্ক	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
পরিসংখ্যা	18	19	13	21	16	25	22	20	21	15

সারণীটিকে কি সত্যি সমসম্ভব বলা চলে ?

15.18 24টি মাসের প্রতিটিতে দেহের একটি বিশেষ গ্রন্থির কর্কটরোগ থেকে মৃত্যুর সংখ্যা নীচে দেওয়া হ'ল

মৃত্যুর সংখ্যা 3, 4, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 2, 0, 4, 3, 2, 6, 0, 4, 2, 0

এই পরিসংখ্যানের বিভাজনের জন্য একটি পোয়াসঁ রেখা নির্ণয় কর এবং তার সাযুজ্যের উৎকর্ষ বিচার কর।

15.19 12টি রাজ্য থেকে নমুনা সংগ্রহ ক'রে সেই নমুনাতে পুরুষছেলে ও মেয়েছেলের জন্মের হিসাব নীচে দেওয়া হ'ল :

রাজ্য	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ছেলে	421	526	206	617	407	813	1011	517	423	822	936	405
মেয়ে	409	509	209	614	380	790	970	520	405	801	910	391

বিচার ক'রে দেখ জন্মের সময়ে পুরুষছেলে ও মেয়েছেলের অনুপাত প্রতি রাজ্যেই সমান কিনা।

এটাকে সত্যি বলে ধ'রে নিয়ে পুরুষছেলের অংশের পরিমাণের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর ; তা থেকে পুরুষছেলে ও মেয়েছেলের অনুপাত সূচক ভগ্নাংশেরও 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় কর।

15.20 কোন একটি রোগ প্রতিষেধক ওষুধের কার্যকারিতার বিবরণ নীচে দেওয়া হ'ল। তথ্য বিশ্লেষণ ক'রে তোমার মন্তব্য লেখ।

ওষুধ	রোগগ্রস্ত নয়	রোগগ্রস্ত
ওষুধ ব্যবহারকারী	12	3
ওষুধ ব্যবহারকারী নয়	4	8

নির্দেশিকা

1. Goon, A.M., Gupta, M.K. & Dasgupta, B. *Fundamentals of Statistics*, Vol. I (Ch. 17). World Press, 1971.

2. Rao, C.R. *Advanced Statistical Methods in Biometric Research* (Chs. 5, 6). John Wiley, 1952.

3. Yule, G.U. & Kendall, M.G. *An Introducion to the Theory of Statisties* (Chs. 17—20). Charles Griffin, 1968.

পরিশিষ্ট

A. প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স গণিত (Elementary Matrix Algebra) :

A.1 mnটি সংখ্যা a_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m$ ও $j=1, 2, \ldots, n$)-কে যদি mটি সারি ও nটি স্তম্ভে আয়তাকারে সাজিয়ে লেখা যায়, তবে আমরা যা পাই তাকে বলে ম্যাট্রিক্স ; যথা

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

সাধারণতঃ আমরা লেখি A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স (a_{ij}) বা

$$A_{m \times n}=(a_{ij})$$

দুটি ম্যাট্রিক্সকে যোগ বা বিয়োগ করা যায় যদি উভয়েরই সারি- ও স্তম্ভ-সংখ্যা পরস্পর সমান হয় ; যথা

যদি $A_{m \times n}=(a_{ij}),\ B_{m \times n}=(b_{ij})$ হয়,

তবে $A_{m \times n}+B_{m \times n}=S_{m \times n}=(s_{ij})$

যেখানে $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\quad (i=1, 2, \ldots, m$
$j=1, 2, \ldots, n)$

এবং $A_{m \times n}-B_{m \times n}=D_{m \times n}=(d_{ij})$

যেখানে $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ $\quad (i=1, 2, \ldots, m$
$j=1, 2, \ldots, n)$

একটি ম্যাট্রিক্সের প্রতি ঘরের সদস্য (element) যদি 0 (শূন্য) হয়, তবে তাকে বলে শূন্যময় (Null) ম্যাট্রিক্স এবং তাকে O দিয়ে সূচিত করা হয়।

ম্যাট্রিক্স $A=$ ম্যাট্রিক্স B, যদি $A-B=O$ হয়।

কোন একটি ম্যাট্রিক্সকে কোন সংখ্যা c দিয়ে নিম্নলিখিতভাবে গুণ করা যায়, যথা

$$c \times A_{m\times n} = C_{m\times n} = (c_{ij})$$

যেখানে $c_{ij} = c \times a_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m$

$\qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n)$

স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে, $c \times A = A \times c$

$(-1) \times A$-কে—A লেখা যায়।

দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B-কে গুণ করা যায় তখনই যখন প্রথমটির স্তম্ভ-সংখ্যা ও দ্বিতীয়টির সারি-সংখ্যা সমান হয়। গুণফল হবে একটি ম্যাট্রিক্স যার সারি সংখ্যা প্রথমটির সারি-সংখ্যার সমান এবং স্তম্ভ-সংখ্যা দ্বিতীয়টির স্তম্ভ-সংখ্যার সমান। স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে, গুণফল AB-র নির্দেশন সম্ভব হলেও গুণফল BA-র অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে, আবার AB ও BA উভয় গুণফল থাকলেও তারা সমান নাও হতে পারে।

$$A_{m\times r}B_{r\times n} = P_{m\times n} = (p_{ij})$$

যেখানে $p_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m$

$\qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n)$

উদাহরণস্বরূপ, ধর

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ও } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

তা হলে

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

এখানে BA কিন্তু অর্থবহ নয়।

আবার ধর

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ও } B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

তা হলে $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

কিন্তু $\quad BA = \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$

লক্ষ্য কর $A_{m\times n} \pm O_{m\times n} = A_{m\times n}$

$$A_{m\times r} \times O_{r\times n} = O_{m\times n}$$

কোন ম্যাট্রিক্সের সারি ও স্তম্ভের বিনিময় ঘটালে যে ম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হয় তাকে বলে প্রথম ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স, যেমন

যদি ম্যাট্রিক্স $A = A_{m\times n} = (a_{ij})$ হয়

তবে তার পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স A' হবে $A'_{n\times m} = (a'_{ji})$,

যেখানে $a'_{ji} = a_{ij}$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, m$

$\quad j = 1, 2, \ldots, n)$

সহজেই দেখান যায় যে,

$$(A')' = A,\ (A \pm B)' = A' + B',\ (AB)' = B'A'$$

লক্ষ্য করার বিষয় যে, যদি

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ও } Y_{n\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ হয়,}$$

তবে $\quad X'X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ এবং $X'Y = Y'X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

যে ম্যাট্রিক্সের সারি-সংখ্যা ও স্তম্ভ-সংখ্যা সমান থাকে বলে বর্গ (square) ম্যাট্রিক্স, যথা

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় প্রতিসম (symmetric) ম্যাট্রিক্স, যদি তার সারি ও স্তম্ভের বিনিময় ঘটালে তার কোন পরিবর্তন হয় না; অর্থাৎ A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স যদি $A = A'$ হয়।

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় কর্ণ (diagonal) ম্যাট্রিক্স যদি তার প্রধান কর্ণ ভিন্ন অন্যত্র অবস্থিত সব সদস্যই 0 হয়। (বামদিকের উঁচু থেকে ডানদিকের নীচু পর্যন্ত কর্ণকে প্রধান কর্ণ বলে।)

এরূপ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স যার প্রধান কর্ণের সদস্যগুলি সব 1 তাকে বলে একক (unit) ম্যাট্রিক্স; অর্থাৎ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের সদস্যগুলি সব

1 ও অন্যান্য সব সদস্য 0 তাকেই বলে একক ম্যাট্রিক্স। একে I দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তাই

$$I=(\delta_{ij}) \text{ যেখানে } \delta_{ii}=1$$
$$\delta_{ij}=0 \quad (i\neq j)$$

অর্থাৎ
$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

এরূপ δ-কে বলা হয় ক্রনেকার ডেল্টা (kronecker delta), সহজেই দেখান যায় যে,
$$A_{m\times n}I_{n\times n}=I_{m\times m}A_{m\times n}=A_{m\times n}$$
$$I^2_{n\times n}=I_{n\times n}I_{n\times n}=I_{n\times n}$$

A.2 বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক (বা নির্ণয়ী) (determinant)-কে $|A|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। আবার A বর্গ ম্যাট্রিক্সের i-তম সারি ও j-তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে যে ম্যাট্রিক্স থাকে তার নির্ণায়ককে বলে a_{ij}-র উপনির্ণায়ক (minor) a_{ij}-র সহউৎপাদক (co-factor) নিম্নলিখিতরূপ হয়।

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}\text{-র উপনির্ণায়ক।}$$

নির্ণায়কের সংজ্ঞা থেকে

$$|A|\text{র মান}=\Delta=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (\text{যে কোন } i=1, 2,\ldots, n\text{-এর জন্য})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (\text{যে কোন } j=1, 2,\ldots, n\text{-এর জন্য})$$

প্রসঙ্গক্রমে বলে রাখা দরকার যে,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0, \quad i\neq k$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}=0, \quad j\neq k$$

সহজেই দেখান যায় যে,

$$|A| = |A'|$$

$$|kA| = k^n |A|, \text{ (যেখানে } k \text{ একটি সংখ্যা)}$$

$$|AB| = |A|\,|B| = |B|\,|A| = |BA|$$

(যদিও AB ও BA সমান না হতে পারে)

যদি $|A| = 0$ হয় তবে বর্গ ম্যাট্রিক্স A-কে বলা হয় অনন্য (singular), নতুবা A-কে বলা হয় সাধারণ (non-singular) ম্যাট্রিক্স।

যদি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A_{n\times n} = (a_{ij})$ হয়, তবে তার সন্নিহিত (adjoint বা adjugate) ম্যাট্রিক্স হবে

$$E_{n\times n} = (e_{ij}) \text{ যেখানে } e_{ij} = A_{ji} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

স্পষ্টতঃই দেখা যায় যে, $(a_{ij})(e_{ij}) = 0$, যখন A একটি অনন্য ম্যাট্রিক্স।

যদি A একটি সাধারণ $n \times n$ বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে তার বিবর্ত (inverse) ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় A^{-1} যেখানে

$$A^{-1} = B = (b_{ij}),\ b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

অনেকক্ষেত্রেই $\frac{A_{ji}}{|A|}$-কে লেখা হয় a^{ij}, সেক্ষেত্রে লেখা হয়

$$A^{-1} = (a^{ij}) \text{ অর্থাৎ } A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

সহজেই দেখান যায় যে

(i) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (এই কারণেই বিবর্ত নামটি এসেছে)

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

(v) A প্রতিসম হলে A^{-1} ও প্রতিসম হবে।

বিবর্ত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, যদি $AB = O$ হয়, তবে A অনন্য ম্যাট্রিক্স না হলে B শূন্যময় ম্যাট্রিক্স হবে এবং B অনন্য ম্যাট্রিক্স না হলে A শূন্যময় ম্যাট্রিক্স হবে, নতুবা A ও B উভয়েই অনন্য ম্যাট্রিক্স হবে। (অবশ্য দুটি অনন্য ম্যাট্রিক্সের গুণফল শূন্যময় ম্যাট্রিক্স নাও হতে পারে)।

A যদি বর্গম্যাট্রিক্স না হয়, তবে এর থেকে যে সমস্ত বর্গম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হয় তাদের প্রতিটিরই নির্ণায়ক হবে A র উপনির্ণায়ক।

একটি ম্যাট্রিক্সের মানক্রম (rank) বলা হবে r, যখন r-ই গরিষ্ঠ পূর্ণসংখ্যা, যাতে ঐ মাত্রার অন্ততঃ একটি উপনির্ণায়ক শূন্য নয়।

একটি বর্গম্যাট্রিক্স $A_{n\times n}$-কে প্রতিলম্ব (orthogonal) ম্যাট্রিক্স বলে যদি

$$AA'=I \text{ হয়}$$

এই ম্যাট্রিক্সের কয়েকটি লক্ষণ নীচে আলোচনা করা যাচ্ছে :

(i) $AA'=I$

সুতরাং $|AA'|=1$

অর্থাৎ $|A|\,|A'|=1$

বা $|A|^2=1$

বা $|A|=\pm 1$

(ii) $AA'=I$

সুতরাং $A'=A^{-1}$

সুতরাং $A'A=A^{-1}A=I$

(iii) $AA'=I$

সুতরাং
$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 &= 1\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{i'j} &= 0\end{aligned}\right\}\; i, i'=1, 2, \cdots, n\ (i\neq i')$$

অর্থাৎ যে কোন সারির সদস্যের বর্গের যোগফল 1 এবং যে কোন দুটি সারির অনুরূপ সদস্যের গুণফলের যোগফল 0.

আবার $A'A=I$

সুতরাং
$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 &= 1\\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ij'} &= 0\end{aligned}\right\}\; j, j'=1, 2, \cdots, n\ (j\neq j')$$

অর্থাৎ যে কোন স্তম্ভের সদস্তের বর্গের যোগফল 1 এবং যে কোন দুটি স্তম্ভের অনুরূপ সদস্তের গুণফলের যোগফল 0.

A.3 পূর্বেই বলা হয়েছে যে, যদি

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ হয়}$$

তবে $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X'X$

সাধারণভাবে $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \; (a_{ij} = a_{ji})$-কে $x_1, x_2, \cdots, x_n$-এর একটি দ্বিঘাতরূপ (quadratic form) বলা হয় এবং একে $Q(x)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে একে লেখা যায় $X'AX$,

যেখানে $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ এবং $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$

এই A-কে বলা হয় প্রদত্ত দ্বিঘাতরূপের ম্যাট্রিক্স। যদি $A = I$ হয়, তবে

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X'IX = X'X.$$

এ প্রসঙ্গে বলে রাখা ভাল যে, কোন বাস্তব দ্বিঘাতরূপ $\sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$ নিশ্চিত ধনাত্মক দ্বিঘাতরূপ (positive definite quadratic form) রূপ হবে, যদি $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ভিন্ন $x_1, x_2, \cdots, x_n$-এর যে কোন মানের জন্য এ ধনাত্মক হয়, অর্থাৎ এর মান 0-র চেয়ে বেশী হয়, আর একে প্রায় নিশ্চিত ধনাত্মক দ্বিঘাতরূপ (semi positive definite quadratic form) বলা হয়, যদি এর মান $x_1, x_2, \cdots, x_n$-এর যে কোন মানের জন্য $\geqslant 0$ হয়।

অনুরূপভাবে নিশ্চিত ও প্রায়নিশ্চিত ঋণাত্মক দ্বিঘাতরূপ (negative definite and semi negative definite quadratic form)-এর সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

প্রমাণ করা যায় যে, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$-কে নিশ্চিত ধনরাশি হতে হলে প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তগুলি হচ্ছে :

$$a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

আর $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$-কে নিশ্চিত ঋণরাশি হতে হলে প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তগুলি হচ্ছে :

$$a_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ ইত্যাদি।}$$

A.4 এখন ঋজুরৈখিক সমীকরণের সমাধানে ম্যাট্রিক্সের ভূমিকা নিয়ে কিছু আলোচনা করা যাক।

নীচে n সংখ্যক চলের mটি ঋজুরৈখিক সমীকরণ নেওয়া হ'ল :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ম্যাট্রিক্সের চিহ্ন ব্যবহার ক'রে এগুলিকে সংক্ষেপে লেখা চলে

$$AX = B \text{ যেখানে } A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ এবং } B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

এই সমীকরণগুলি সমঞ্জস নাও হতে পারে। একে সমঞ্জস হতে হলে ম্যাট্রিক্স A ও $\bar{A}$-এর মানক্রম সমান হতে হবে, যেখানে $A_{m\times n}$ পূর্বের মতো

$$\text{আর} \quad \bar{A}_{m\times \overline{n+1}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

যদি $B=0$ হয় অর্থাৎ যখন সমীকরণগুলির দক্ষিণপার্শ্ব সব 0 হয়, তখন তাদের বলা হয় সমজাতীয় (homogeneous); নতুবা সমীকরণগুলিকে বলে অসমজাতীয় (heterogeneous)। সমজাতীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে A ও $\bar{A}$-এর মানক্রম সর্বদাই সমান, তাই সমীকরণগুলি সর্বদাই সমঞ্জস।

A ও $\bar{A}$-এর মানক্রম যখন উভয়েই n তখন সমীকরণগুলি সমঞ্জস তো বটেই, তার ওপরে তাদের একটিমাত্র সমাধান থাকে, কিন্তু এই সাধারণ মানক্রম যখন n থেকে কম হয় তখন তাদের একাধিক সমাধান থাকবে।

এ-সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনার মধ্যে না গিয়ে একটি বিশেষ বিষয়ের দিকে লক্ষ্য রাখা যাক্। ফলিত রাশিবিজ্ঞানে এটাই বেশী প্রয়োজনীয়।

ধরলাম $m=n$, অর্থাৎ n-সংখ্যক চলের n-সংখ্যক ঋজুরৈখিক সমীকরণ দেওয়া আছে; যথা—

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

আরও ধরলাম A ও $\bar{A}$ ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের সাধারণ মানক্রম n। সেক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান থাকে, তা নীচে দেওয়া হ'ল।

$$AX=B$$

সুতরাং $\quad X=A^{-1}B \quad$ [$n\times n$ ম্যাট্রিক্স A-র মানক্রম n হওয়ায় $|A|$ শূন্য নয়, তাই A^{-1} বর্তমান]

অর্থাৎ
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

বা $\quad x_i = a^{i1}b_1 + a^{i2}b_2 + \cdots + a^{in}b_n, \; i=1, 2, \cdots, n$

স্পষ্টতঃই সমজাতীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে $x_i=0$ (কারণ $B=0$)

এখন লক্ষণীয় যে সাধারণ সমীকরণে $b_j=1$, $b_j'=0$ $(j\neq j')$ বসালে x_i-এর যে সমাধান পাওয়া যায় তাই a^{ij}।

এরূপ একটি সমীকরণের ধারাবাহিক সমাধান নীচে দেওয়া হ'ল।

সমীকরণমালা

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 17 \end{aligned}$$

সমীকরণের সমাধান, x-এর সহগগুলি দিয়ে তৈরী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান ও তার বিবর্ত ম্যাট্রিক্স একই প্রক্রিয়াতে দেখান হ'ল। কোন প্রশ্নে এ প্রক্রিয়ার যতটুকু দরকার ততটুকুই ব্যবহার করতে হবে। সহগ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম নেওয়া হয়নি, কিন্তু রাশিবিজ্ঞানে প্রায়ই ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হয়। সেক্ষেত্রে খাটুনি বেশ কমে যায়।

সারি সংখ্যা	x-এর	সহগ	ম্যাট্রিক্স	দক্ষিণ পক্ষ	একক	ম্যাট্রিক্স		যোগ পরীক্ষা
0	⊙1	2	3	4	5	6	7	8
01	3	2	4	20	1	0	0	30
02	2	1	2	12	0	1	0	18
03	4	−1	3	17	0	0	1	24
10	1	0·6667	1·3333	6·6667	0·3333	0	0	10
11	⊙	−0·3333	−0·6667	−1·3333	−0·6667	1	0	− 2
12		−3·6667	−2·3333	−9·6667	−1·3333	0	1	−16
20		1	2	4	2	−3	0	6
21			⊙5	5	6	−11	1	6
30			1	1	1·2	−2·2	0·2	1·2
20′		1		2	−0·4	1·4	−0·4	3·6
10′	1			4	−1	2	0	6

সারি 01,02,03 এবং স্তম্ভ 1,2,3 মিলে সমীকরণে x-এর সহগগুলি লেখা হয়েছে। এই তিন সারিতে স্তম্ভ 4-এ সমীকরণের দক্ষিণপার্শ্বস্থ মানগুলি লেখা হয়েছে। এই তিন সারি ও স্তম্ভ 5,6,7-এ 3×3 একক ম্যাট্রিক্সের সদস্যগুলি লেখা হয়েছে। স্তম্ভ 5,6 ও 7 স্তম্ভ 4-এর অনুরূপ অর্থাৎ সমীকরণের দক্ষিণপার্শ্বস্থ মানগুলি যেন যথাক্রমে 1,0,0; 0,1,0 এবং 0,0,1। স্তম্ভ 8-এ যোগফলের সাহায্যে প্রতি সারিতে হিসাব পরীক্ষা করা হয়েছে।

সারি 01-এর প্রথম অর্থাৎ এই সারিতে স্তম্ভ 1-এর সদস্যকে বলা হয় মূল

সদস্য। সেটি ⊙ প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত হয়েছে। এই 01 সারির প্রতি উপাদানকে এই মূল সদস্য দিয়ে ভাগ ক'রে সারি 10টি পাওয়া গেছে। এতে এই সারির প্রথম অর্থাৎ এই সারিতে স্তম্ভ 1 এর সদস্য হয়েছে 1. সারি 10কে সারি 02-এর প্রথম সদস্য দিয়ে গুণ করে সারি 02 থেকে বাদ দিয়ে সারি 11 পাওয়া গেছে। তাতে এই নতুন সারির প্রথম সদস্যটি হয়েছে 0, সেটি দেখান হয়নি। অনুরূপভাবে সারি 03 থেকে সারি 12 পাওয়া গেছে।

এবারে সারি 11 ও 12 থেকে একই প্রক্রিয়া অবলম্বনে সারি 20 ও 21 পাওয়া গেছে। তারপর সারি 21 থেকে ঐ একইভাবে সারি 30 পাওয়া গেছে।

সারি 30-তে x_3-এর সমাধান পাওয়া গেছে। তারপর সারি 20 থেকে x_3-এর মান বসিয়ে সারি 20′-এ x_2 এর সমাধান পাওয়া গেছে। অনুরূপভাবে সারি 10 থেকে সারি 10′-এ x_1-এর সমাধান পাওয়া গেছে।

তাই স্তম্ভ 4 থেকে সমীকরণের সমাধান হ'ল

$$x_1 = 4, \; x_2 = 2, \; x_3 = 1$$

স্তম্ভ 5, 6, 7কে সারির দিক থেকে বিপরীতক্রমে লিখলে সহগ ম্যাট্রিক্সের বিবর্ত ম্যাট্রিক্স দাঁড়ায়

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -0{\cdot}4 & 1{\cdot}4 & -0{\cdot}4 \\ 1{\cdot}2 & -2{\cdot}2 & 0{\cdot}2 \end{pmatrix}$$

এখানে লক্ষণীয় যে স্তম্ভ 5, 6 ও 7-এ যে কোন x-এর সমাধানকে সমীকরণের দক্ষিণপার্শ্বস্থ মানগুলি দ্বারা যথাক্রমে গুণ ক'রে যোগ করলে সমীকরণের সমাধান পাওয়া যায়।

পূর্বেই বলা হয়েছে সারি 01 ও স্তম্ভ 1-এর সদস্যটি মূল সদস্য। অনুরূপভাবে সারি 11 ও স্তম্ভ 2-এর সদস্য এবং সারি 21 ও স্তম্ভ 3-এর সদস্যও মূল সদস্য। এ দুটিকেও প্রথমটির ন্যায় ⊙ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে।
সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হচ্ছে এই তিনটি মূল সদস্যের গুণফল। এখানে এটা

$$3 \times (-0{\cdot}3333) \times 5 \text{ অর্থাৎ } -5$$

A.5 এখন চলের রূপান্তর প্রসঙ্গে আসা যাক। সেখানেও ম্যাট্রিক্সের মুখ্য ভূমিকা রয়েছে।

সমাকলনের সুবিধার জন্য অনেক সময় চলের রূপান্তর প্রয়োজন হয়। ধরলাম প্রাথমিক চল ছিল $x_1, x_2, \ldots, x_n$। এদের পরিবর্তে নতুন চল আনা হ'ল $y_1, y_2, \ldots, y_n$ যেখানে

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

এই রূপান্তরকে বলা হয় ঋজুরৈখিক রূপান্তর (linear transformation)। ম্যাট্রিক্স চিহ্নে এই রূপান্তরকে লেখা যায়

$$X = AY \text{ যেখানে}$$

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y_{n\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{এবং } A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(a_{ij}) ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় রূপান্তরের ম্যাট্রিক্স।

$|a_{ij}|$ নির্ণায়ককে বলা হয় রূপান্তরের মডিউলাস (modulus)

কোন রূপান্তরে নীচের নির্ণায়কটি বিশেষ প্রয়োজনীয়

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

এই নির্ণায়ককে সংক্ষেপে লেখা হয় $\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ এবং একে বলা হয় জ্যাকোবিয়ান (Jacobian) বা সংক্ষেপে J

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{1}{J}=\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

আরও প্রমাণ করা যায় $\prod_{i=1}^{n} dx_i = |J| \prod_{i=1}^{n} dy_i$

উপরিলিখিত ঋজুরৈখিক রূপান্তরে

$$J=|a_{ij}| = \text{মডিউলাস}$$

পুনরায় ঐ ঋজুরৈখিক রূপান্তরের ম্যাট্রিক্স যদি প্রতিলম্ব ম্যাট্রিক্স হয় তবে ঐ রূপান্তরকে বলা হয় প্রতিলম্ব রূপান্তর। স্পষ্টতঃই প্রতিলম্ব রূপান্তরের মডিউলাস ও জ্যাকোবিয়ান উভয়েই ± 1.

এখানে লক্ষণীয় যে

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X'X = Y'A'AY = Y'Y = \sum_{i=1}^{n} y^2$$

অর্থাৎ পুরাতন চলগুলির বর্গের সমষ্টি নতুন চলগুলির বর্গের সমষ্টির সমান।

যদি $X=AY$ ও $U=AV$ দুটি প্রতিলম্ব রূপান্তর হয় যাদের ম্যাট্রিক্স সমান, তবে

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

এবং $$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = X'U = Y'A'AV = Y'V = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

যেখানে X ও Y-এর কথা পূর্বেই বলা হয়েছে

এবং $$U_{n\times 1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ ও } V_{n\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

এর অর্থ এই যে পুরাতন দুই শ্রেণীর চলের গুণফলের সমষ্টি নতুন অনুরূপ দুই শ্রেণীর চলের গুণফলের সমষ্টির সমান।

আবার যদি $X = AY$ ও $Y = BZ$ দুটি প্রতিলম্ব রূপান্তর হয়, তবে

$X = ABZ$ নিজেও একটি প্রতিলম্ব রূপান্তর অর্থাৎ দুটি প্রতিলম্ব রূপান্তরের গুণফলও একটি প্রতিলম্ব রূপান্তর, কারণ

$$(AB)(AB)' = ABB'A' = AA' = I$$

এখানে X ও Y পূর্বের মতো এবং $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$

অপর একটি রূপান্তর যেটি রাশিবিজ্ঞানে খুব কাজে লাগে সেটি হচ্ছে কৌণিক রূপান্তর। সেটির সম্বন্ধে নীচে আলোচনা করা হচ্ছে।

ধরলাম, প্রাথমিক চল $x_1, x_2, \ldots, x_n$-কে

নতুন চল R ; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$-এ রূপান্তরিত করা হ'ল।

রূপান্তরটি

$$x_1 = R \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}$$

$$x_2 = R \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}$$

$$x_3 = R \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$x_{n-1} = R \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$x_n = R \sin\theta_1$$

এই রূপান্তরের ফলে স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$$

যদি $0 < x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ হয়,

তবে $0 < R < \infty$, $0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, \overline{n-1}$.

আর যদি $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ হয়,

তবে $0 < R < \infty$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, \overline{n-2}$

$$-\pi < \theta_{\overline{n-1}} < \pi.$$

এই রূপান্তরটির জন্য J নীচে নিরূপণ করা হচ্ছে।

$$J = R^{n-1} \cos^{n-1}\theta_1 \cos^{n-2}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -\tan\theta_1 & -\tan\theta_2 \ldots\ldots\ldots & -\tan\theta_{n-2} & -\tan\theta_{n-1} \\ 1 & -\tan\theta_1 & -\tan\theta_2 \ldots\ldots\ldots & -\tan\theta_{n-2} & \cot\theta_{n-1} \\ 1 & -\tan\theta_1 & -\tan\theta_2 \ldots\ldots\ldots & \cot\theta_{n-2} & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -\tan\theta_1 & \cot\theta_2 \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 1 & \cot\theta_1 & 0 \quad \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^{n-1} \cos^{n-1}\theta_1 \cos^{n-2}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tan\theta_{n-1} + \cot\theta_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \tan\theta_{n-2} + \cot\theta_{n-2} & \tan\theta_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \tan\theta_2 + \cot\theta_2 & \tan\theta_{n-2} & \tan\theta_{n-1} \\ 1 & \tan\theta_1 + \cot\theta_1 & \tan\theta_2 & \tan\theta_{n-2} & \tan\theta_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n^2+n-6}{2}} R^{n-1} \cos^{n-1}\theta_1 \cos^{n-2}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots$$
$$\sin\theta_{n-1} \times (\tan\theta_1 + \cot\theta_1)(\tan\theta_2 + \cot\theta_2) \cdots (\tan\theta_{n-1} + \cot\theta_{n-1})$$

$$= (-1)^{\frac{n^2+n-6}{2}} R^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2}$$

বিশেষ ক্ষেত্রে, যখন $n = 2$

$$x_1 = R\cos\theta$$

$$x_2 = R\sin\theta$$

সুতরাং $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ এবং $J = R$

যদি $0 < x_i < \infty \ (i = 1, 2)$ হয়,

তবে $0 < R < \infty, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

যদি $0 < x_1 < \infty, \ -\infty < x_2 < \infty$ হয়,

তবে $0 < R < \infty, \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

যদি $-\infty < x_1 < \infty, \ 0 < x_2 < \infty$ হয়,

তবে $0 < R < \infty, \ 0 < \theta < \pi$

যদি $-\infty < x_i < \infty \ (i = 1, 2)$ হয়,

তবে $0 < R < \infty, \ -\pi < \theta < \pi$ বা $0 < \theta < 2\pi$.

B. অন্তর্কলন ও সমাকলন সংশ্লিষ্ট কয়েকটি বিষয়

(Some topics relating to differential and integral calculus) :

B.1 অন্তর্কলন বিষয়ক জ্ঞান থেকে আমরা এক বা একাধিক চলের অপেক্ষকের গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানের জন্য চলগুলির মান বের করতে পারি, কিন্তু একাধিক চলের ক্ষেত্রে যদি তাদের উপরে কিছু শর্ত আরোপ করা থাকে তবে কীভাবে অগ্রসর হতে হবে সেই প্রশ্নের সমাধান হিসাবে ল্যাগরেঞ্জ (Lagrange) একটি সুন্দর পদ্ধতি বের ক'রে গেছেন। সেই পদ্ধতির নাম ল্যাগরেঞ্জের অনির্ধারিত গুণক পদ্ধতি (Lagrange's method of undetermined multiplier)। রাশিবিজ্ঞানে এটি বিশেষ প্রয়োজনীয়।

ধরলাম $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n চল $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর একটি অপেক্ষক। আরও ধরলাম যে $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর উপরে m সংখ্যক শর্ত আরোপ করা আছে, যথা

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

তাই আমরা $(n-m)$ সংখ্যক চলকে বলতে পারি অনপেক্ষ ও বাকী m চলকে বলতে পারি সাপেক্ষ। কোন্ $(n-m)$ চলগুলি অনপেক্ষ তা জানবার প্রয়োজন নেই—যে কোন $(n-m)$ হলেই চলবে। ধরলাম এরা $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$

শর্তগুলির সাহায্যে f থেকে সাপেক্ষ চল $x_1, x_2, \ldots, x_m$-কে বিতাড়িত করে অনপেক্ষ চল $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$-এর কোন্ মানের জন্য f গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ তা আমরা বের করতে পারি।

কিন্তু প্রকৃতপক্ষে $x_1, x_2, \ldots, x_m$-কে অপসারিত না ক'রেও আমরা নীচের পদ্ধতির মতো এগোতে পারি।

যখন f গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

পুনরায় $$d\phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$d\phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$d\phi_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} dx_n = 0$$

উপরের সমীকরণগুলোকে যথাক্রমে $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ দিয়ে গুণ ক'রে, তারপর এই গুণফলগুলোকে যোগ ক'রে আমরা পাই

$$P_1dx_1 + P_2dx_2 + P_3dx_3 + \cdots P_ndx_n = 0$$

যেখানে $P_r = \frac{\partial f}{\partial x_r} + \lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x_r} + \lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x_r} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial x_r}$

$$r = 1, 2, \ldots, n$$

এখন m সংখ্যা $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ আমাদের হাতে। আমরা তাদের এমনভাবে বেছে নিলেম যেন

$P_1 = P_2 = P_3 \cdots = P_m = 0$ হয়

সুতরাং উপরিলিখিত সমীকরণ দাঁড়াল

$$P_{m+1}dx_{m+1} + P_{m+2}dx_{m+2} + \cdots + P_ndx_n = 0$$

এখন $(n-m)$ রাশি $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ পরস্পর নিরপেক্ষ।

সুতরাং তাদের সহগগুলি সকলেই 0।

অর্থাৎ $P_{m+1} = P_{m+2} = \cdots\cdots = P_n = 0$

সুতরাং $(m+n)$ সমীকরণ দাঁড়াল

$$\phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_m = 0$$

এবং $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$

এই $(m+n)$ সমীকরণ সমাধান ক'রে আমরা m সংখ্যক গুণক $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$-এর মান এবং n চল $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর যে মানের জন্য f গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ তা বের করতে পারি।

সুতরাং আমাদের কাজ হবে

$$f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_m\phi_m\text{-কে}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ অনুসারে অন্তর্কলন ক'রে প্রত্যেকটিকে শূন্যের সমান ধ'রে সমীকরণ সমাধান করা। এতে $x_1, x_2, \ldots. x_n$-এর প্রত্যেকের মান $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$-এর উপর নির্ভর করবে। এবারে $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$-এর সাহায্যে $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$-এর মান বের করা যাবে। অবশেষে $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর মধ্যে $\lambda_1\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m$-এর মান বসিয়ে তাদের নির্ণেয় মান পাওয়া যাবে যাতে f গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে।

উদা.: $l_1 + l_2$ যদি 1 হয় তবে $l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2$-এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর :

$$L = l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2 + \lambda(l_1 + l_2 - 1)\text{-কে}$$

l_1 ও l_2 অনুসারে অন্তর্কলন ক'রে এবং প্রত্যেকটিকে শূন্যের সমান ধরে আমরা নীচের দুটি সমীকরণ পাই :

$$2l_1\sigma_1^2 + \lambda = 0$$

$$2l_2\sigma_2^2 + \lambda = 0$$

সুতরাং $l_1 = -\dfrac{\lambda}{2\sigma_1^2}$ ও $l_2 = -\dfrac{\lambda}{2\sigma_2^2}$

এখন যেহেতু $l_1 + l_2 = 1$

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) = 1$$

অর্থাৎ $\lambda = -\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}}$

সুতরাং $l_1 = \dfrac{1}{\sigma_1^2} \Big/ \left(\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}\right)$

এবং $l_2 = \dfrac{1}{\sigma_2^2} \Big/ \left(\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}\right)$

l_1 ও l_2-এর উপরিলিখিত মানের জন্য $l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2$ গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান গ্রহণ করবে।

এখন $\dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1^2}, \dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1 \partial l_2}$ ও $\dfrac{\partial^2 L}{\partial l_2^2}$ যথাক্রমে $2\sigma_1^2$, 0 ও $2\sigma_2^2$-এর সমান।

সুতরাং l_1 ও l_2-এর উপরিলিখিত মানের জন্যও উহারা যথাক্রমে $2\sigma_1^2$, 0 ও $2\sigma_2^2$ এর সমান।

এখন $\dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1^2}$ = ধনাত্মক

এবং $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1 \partial l_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial l_1 \partial l_2} & \dfrac{\partial_2 L}{\partial l_2^2} \end{vmatrix}$ = ধনাত্মক

সুতরাং l_1 ও l_2-এর উপরিলিখিত মানের জন্য $l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2$ লঘিষ্ঠ মান গ্রহণ করে। এই লঘিষ্ঠ মান হ'ল

$$\sigma_1^2 \times \frac{1}{\sigma_1^4} \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \sigma_2^2 \times \frac{1}{\sigma_2^4} \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2$$

$$= 1 \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)$$

B.2 এখন অয়লারের (Euler's) দুটি বিশেষ সমাকলনের বিষয়ে বলা হচ্ছে, যে দুটি রাশিবিজ্ঞানে বিশেষ প্রচলিত।

অয়লারের প্রথম সমাকলনটি হচ্ছে

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

যদি $m, n > 0$ হয়, তবে এই সমাকলনটি কেন্দ্রাভিসারী (convergent)। একে $B(m, n)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং একে বলা হয় বিটা (beta) অপেক্ষক বা বিটা সমাকলক।

তাই $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = B(m, n)$

আমরা দেখি

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1}\theta \sin^{n-1}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{m-2}{2}}(1-x)^{\frac{n-2}{2}} dx \qquad (\cos^2\theta = x \text{ বসিয়ে})$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

আবার $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

$$= \int_0^1 (1-y)^{m-1}y^{n-1}dy \qquad (x = 1-y \text{ বসিয়ে})$$

$$= B(n, m)$$

অয়লারের দ্বিতীয় সমাকলনটি হচ্ছে

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

যদি $n > 0$ হয়, তবে এই সমাকলনটি কেন্দ্রাভিসারী। একে Γn দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং একে বলা হয় গামা (Gamma) অপেক্ষক বা গামা সমাকলক।

সুতরাং $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \lceil n$

আমরা দেখি

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx=\frac{1}{a^n}\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}dy=\frac{\overline{|n}}{a^n}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{n-1}dx=\frac{1}{2a^{n/2}}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{n-2}{2}}\,dy=\frac{\overline{|n/2}}{2a^{n/2}}$$

সুতরাং বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $a=1$ ও $n=1$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\overline{|\tfrac{1}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(নীচে দ্রষ্টব্য)}$$

আবার

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

$$=\Big[-e^{-x}.x^{n-1}\Big]_0^\infty-(n-1)\int_0^\infty -e^{-x}x^{n-2}dx$$

$$=(n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx$$

সুতরাং $\overline{|n}=(n-1)\overline{|n-1}$

সুতরাং n পূর্ণসংখ্যা হলে $\overline{|n}=(n-1)\,!$

এবং n পূর্ণসংখ্যা না হলে $\overline{|n}=(n-1)(n-2)\cdots f\overline{|f}$, যেখানে $0<f<1$

উপরে $\overline{|\tfrac{1}{2}}$-এর পরিবর্তে $\sqrt{\pi}$ লেখা হয়েছে তার প্রমাণ নীচে দেওয়া হ'ল :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\overline{|\tfrac{1}{2}}$$

ও $$\int_0^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy=\overline{|\tfrac{1}{2}}$$

সুতরাং $$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}(xy)^{-\frac{1}{2}}dx\;dy=(\overline{|\tfrac{1}{2}})^2$$

ধরলাম $x=z\cos^2\theta \qquad 0<z<\infty$

$y=z\sin^2\theta \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad |J|=2z\sin\theta\cos\theta$

সুতরাং $$2\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}e^{-z}dz\,d\theta=(\overline{|\tfrac{1}{2}})^2$$

অর্থাৎ $$2\left(\int_0^\infty e^{-z}dz\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)=(\overline{|\tfrac{1}{2}})^2$$

অর্থাৎ $2\,\Gamma\frac{\pi}{2}=(\Gamma\tfrac{1}{2})^2$

অর্থাৎ $\pi=(\Gamma\tfrac{1}{2})^2$

সুতরাং $\Gamma\tfrac{1}{2}=\sqrt{\pi}$

B-অপেক্ষক ও Γ অপেক্ষকের মধ্যে একটি সম্বন্ধ রয়েছে। সেটি নীচে প্রমাণিত হচ্ছে।

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}dx=\Gamma m$$

$$\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}dy=\Gamma n$$

সুতরাং $$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{m-1}y^{n-1}dx\,dy=\Gamma m\,\Gamma n$$

ধরলাম $x=uv \qquad 0<u<1 \qquad |J|=v$

$y=(1-u)v \qquad 0<v<\infty$

সুতরাং $$\int_0^1\int_0^\infty e^{-v}v^{m+n-1}u^{m-1}(1-u)^{n-1}du\,dv=\Gamma m\,\Gamma n$$

অর্থাৎ $$\left(\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du\right)\left(\int_0^\infty e^{-v}v^{m+n-1}dv\right)=\Gamma m\,\Gamma n$$

অর্থাৎ $B(m,n)\,\Gamma(m+n)=\Gamma m\,\Gamma n$

অর্থাৎ $$B(m,n)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

নির্দেশিকা

1. Ferrar, W. L. *Algebra.* Oxford University Press, 1941.

2, Aitken. A. C. *Determinants and Matrices.* Oliver and Boyd, 1946.

3. Edwards, J. *An elementary treatise of Differential Calculus*, Macmillan & Co, Ltd.

4. Williamson, B. *An elementary treatise on the Integral Calculus.* Longmans Green & Co.

C. সংখ্যাভিত্তিক গণিত (Numerical Mathematics) :

C.1 রাশির সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তি ও তার অপনোদন (Error due to rounding off of numbers and its elimination) :

অঙ্ক কষে হিসেবের জটিলতা দূর করার জন্যে অনেক সময় কোন সংখ্যার পরিবর্তে তার চেয়ে সামান্য পৃথক্ অপর একটি সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। যেমন, π, $\sqrt{2}$, 5·89665··· ইত্যাদি সংখ্যার পরিবর্তে যথাক্রমে 3·1416, 1·4142, 5·897 ইত্যাদি সংখ্যাকে ব্যবহার করা হয়। এই শেষোক্ত সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে প্রথমোক্ত সংখ্যাগুলির আসন্ন মান (approximate value) বলা হয়। এদের পার্থক্যকে ভ্রান্তি বলে ও সাধারণতঃ এই ভ্রান্তির পরিমাণ খুবই কম হয়।

1 থেকে 9 পর্যন্ত অখণ্ড সংখ্যাগুলিকে এক একটি 'সার্থক অঙ্ক' (significant figure বা significant digit) বলে। কেবলমাত্র দশমিক বিন্দুর স্থান নির্ণয়ে বা অজ্ঞাত ও পরিত্যক্ত সার্থক অঙ্কের পরিবর্তে যখন 0 ব্যবহৃত হয় তখন 0-কে সার্থক অঙ্ক বলে না। অন্যান্য ক্ষেত্রে 0-কেও সার্থক অঙ্ক বলা হবে। যেমন, ·03 এই সংখ্যাটির সার্থক অঙ্ক হচ্ছে কেবলমাত্র 3 (0 নয়), কিন্তু 4·507 সংখ্যাটিতে 4, 5, 0 এবং 7 এরা প্রত্যেকেই সার্থক অঙ্ক।

কোন সংখ্যায় যদি অনেকগুলি অঙ্ক থাকে, তবে অনেক সময় তার বামদিক থেকে সুরু ক'রে পরপর কয়েকটি অঙ্ক মাত্র বজায় রেখে দক্ষিণদিকের সবকটি অঙ্ককেই বাতিল ক'রে দেওয়া হয়। একে বলে রাশির সংক্ষেপীকরণ (rounding off of numbers). যেমন, π-এর ষষ্ঠ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সংক্ষেপীকরণ হলে সংক্ষিপ্ত রাশিটি দাঁড়াবে 3·14159 ; কারণ, π-এর আসল মান যে রাশিদ্বারা প্রকাশ্য তার সর্ববাম থেকে সুরু করে দক্ষিণে সপ্তম ও তার পরবর্তী সব সার্থক অঙ্ককে বর্জন করা হয়েছে। (এখানে যদি 3·14159-কে 3·141590 লেখা হয়, তবে এই 0টি সার্থক অঙ্ক নয়)। এই সংক্ষেপীকরণ এমনভাবে করা উচিত যাতে মূলরাশি ও সংক্ষেপিত রাশিটির পার্থক্য (যাকে রাশিটির সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তি—error due to rounding off of numbers—বলা হয়) যথাসম্ভব কম হয়।

কোন রাশিকে n-তম সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সংক্ষেপিত করতে হলে

(1) বামদিক থেকে গণনা ক'রে n-তম সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সংরক্ষণ ক'রে তার দক্ষিণস্থিত সব অঙ্ককে বর্জন করতে হয় ;

(2) পরিত্যক্ত সংখ্যাটুকু n-তম অঙ্কটির অর্ধাংশের

(i) চেয়ে ক্ষুদ্রতর হলে n-তম অঙ্কটিকে অপরিবর্তিত রাখতে হয়,

(ii) চেয়ে বৃহত্তর 　" 　" 　অঙ্কটির সঙ্গে 1 যোগ করতে হয়,

(iii) সমান হলে, (i)′ n-তম অঙ্কটি যুগ্ম হলে তাকে
অপরিবর্তিত রাখতে হয়,

এবং (ii)′ n-তম অঙ্কটি বিযুগ্ম হলে তার সঙ্গে 1 যোগ করতে হয়। এই কটি নিয়ম মেনে কোন সংখ্যাকে সংক্ষেপিত করা হলে বলা হবে যে, সংখ্যাটি n-তম সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ (correct to n significant figures).

কোন রাশির প্রকৃত মান ও তার আসন্ন মানের পার্থক্যের চিহ্ন-নিরপেক্ষ মানকে রাশিটির চিহ্ন-নিরপেক্ষ ভ্রান্তি (absolute error) বলা হয়। রাশির চিহ্ন-নিরপেক্ষ ভ্রান্তিকে প্রকৃত মান দিয়ে ভাগ করলে প্রাপ্ত ভাগফলকে রাশির আপেক্ষিক ভ্রান্তি (relative error) ও তাকে 100 দিয়ে গুণ ক'রে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকে রাশির শতকরা ভ্রান্তি (percentage error) বলে।

যদি একটি রাশি n-তম সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ হয় তবে তার চিহ্ন-নিরপেক্ষ ভ্রান্তির পরিমাণ রাশিটির বামদিক থেকে n-তম স্থানবর্তী এককের অর্ধাংশের চেয়ে বেশী হবে না। অর্থাৎ 14·302 যদি পঞ্চম স্থান পর্যন্ত সার্থক হয়, তবে এর চিহ্ন-নিরপেক্ষ ভ্রান্তি সর্বাধিক $\cdot 001 \times \frac{1}{2} = \cdot 0005$ হতে পারে। যখনই কোন রাশিমালার মাধ্যমে কোন তথ্য প্রকাশ করা হবে তখনই আমাদের দেখা উচিত ঐ রাশিমালার মধ্যে সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তি আছে কিনা এবং থাকলে তা যথাসম্ভব নিয়ন্ত্রিত বা নিরাকরণ করার চেষ্টা করা উচিত। সমীকরণের সমাধান করতে গেলে যে বীজ পাওয়া যায়, তা সমীকরণের অজ্ঞাতরাশিগুলির সহগ ও প্রদত্ত জ্ঞাতরাশিগুলি সংক্ষেপীকৃত হওয়ার ফলে ভ্রান্তিদুষ্ট হয়ে পড়ে। সেক্ষেত্রে ঐ ভ্রান্তি খানিকটা কমানোর চেষ্টা কীভাবে করা যেতে পারে একটি উদাহরণ নিয়ে তা নীচে দেখানো হবে। তার আগে কোন রাশিমালার ভ্রান্তি-পরিমাণের একটি সাধারণ সূত্র আলোচনা করা যাক্। যে-কোন পরস্পর নিরপেক্ষ nটি সংখ্যা $u_1, \cdots u_i, \cdots u_n$-এর যে-কোন অপেক্ষক f-এর জন্যে

আমরা লিখতে পারি $N=f(u_1,\cdots u_i,\cdots u_n)$. এখন $i=1,\cdots n$-এর জন্যে u_i এর ভ্রান্তি Δu_i হলে ভ্রান্তিশূন্য অবস্থায় N-এর মান হবে

$$N+\Delta N=f(u_1+\Delta u_1,\cdots, u_n+\Delta u_n)\ ;$$

[ΔN-কে N-এর ভ্রান্তি বলা হচ্ছে].

এখন, উপযুক্ত স্বীকরণ সাপেক্ষে f-এর টেলার প্রসারণ (Taylor's expansion) বিবেচনা করে ও Δu_i $(i=1,\cdots, n)$-এর পরিমাণ সামান্য ধ'রে ও ফলে $(\Delta u_i)^r$ $(r=2, 3,\cdots)$ এর পরিমাণ নগণ্য ধরে ও তাদেরকে বাতিল ক'রে আসন্নভাবে পাওয়া যায়

$$N+\Delta N=f(u_1,\cdots u_n)+\Delta u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+\cdots+\Delta u_n\frac{\partial f}{\partial u_n}$$

[এখানে, $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ $(i=1,\cdots, n)$ হচ্ছে u_i-এর বরাবর f-এর প্রথম আংশিক অন্তর্কলক (partial derivative)].

ফলে N-এর ভ্রান্তির সাধারণ সূত্র দাঁড়ায়

$$\Delta N=\Delta u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+\Delta u_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+\cdots+\Delta u_n\frac{\partial f}{\partial u_n}$$

অর্থাৎ $$\Delta N=\Delta u_1\frac{\partial N}{\partial u_1}+\Delta u_2\frac{\partial N}{\partial u_2}+\cdots+\Delta u_n\frac{\partial N}{\partial u_n}.$$

এখন, মনে কর :

$$a_1x_1+b_1x_2=c_1$$

ও $$a_2x_1+b_2x_2=c_2$$

হচ্ছে ঋজুরৈখিক সমীকরণ যার মধ্যে জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশিমালার সবকটিই সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তি দুষ্ট। মনে কর এই ভ্রান্তিসমেত এদেরকে একত্রে সমাধান ক'রে বীজ পাওয়া গেল $x_1{}^0$ ও $x_2{}^0$.

তাহলে, $$a_1x_1{}^0+b_1x_2{}^0=c_1 \qquad (C.1)$$

এবং $$a_2x_1{}^0+b_2x_2{}^0=c_2 \qquad (C.2)$$

এখন মনে কর, Δa_i, Δb_i, $\Delta x_i{}^0$ ও Δc_i $(i=1, 2)$ হচ্ছে a_i, b_i, $x_i{}^0$ ও c_i—সংশ্লিষ্ট উল্লিখিতরূপ ভ্রান্তি $(i=1, 2)$.

তাহলে ভ্রান্তিযুক্ত সমীকরণদ্বয় হবে

$$(a_1+\Delta a_1)(x_1{}^0+\Delta x_1{}^0)+(b_1+\Delta b_1)(x_2{}^0+\Delta x_2{}^0)=c_1+\Delta c_1 \qquad (C.3)$$

ও $$(a_2+\Delta a_2)(x_2{}^0+\Delta x_2{}^0)+(b_2+\Delta b_2)(x_2{}^0+\Delta x_2{}^0)=c_2+\Delta c_2 \qquad (C.4)$$

মূল (a_i, x_i^0, b_i, c_i) সংখ্যাগুলির তুলনায় তাদের ভ্রান্তির পরিমাণ অবশ্যই ছোট হবে। তাই $\Delta m_i, \Delta n_i$ $(m, n = a, b, c, x_i^0, m \neq n)(i = 1, 2)$-কে Δm_i ও Δn_i-এর তুলনায় নগণ্য ধ'রে তাদেরকে (A.1.3) ও (A.1.4) থেকে বাদ দিয়ে (A.1.3) ও (A.1.4) থেকে যথাক্রমে (A.1.1) ও (A.1.2) বিয়োগ ক'রে পাওয়া যায়

$$a_1 \Delta x_1^0 + x_1^0 \Delta a_1 + b_1 \Delta x_2^0 + x_2^0 \Delta b_1 = \Delta c_1 \qquad (C.5)$$

ও

$$a_2 \Delta x_1^0 + x_2^0 \Delta b_2 + b_2 \Delta x_2^0 + x_2^0 \Delta b_2 = \Delta c_2 \qquad (C.6)$$

এখন, Δa_i, Δb_i ও Δc_i এর মান সাধারণতঃ জানা থাকে; অন্যথায় তাদের সর্বোচ্চ চিহ্ন-নিরপেক্ষ মান জানা থাকে এবং সেক্ষেত্রে তাদেরকে ঐ সর্বোচ্চ চিহ্ন-নিরপেক্ষ মান দিয়ে পরিবর্তিত করা হয়ে থাকে (পরিবর্তিত মানগুলিকেও আমরা একই সংকেত সূত্র Δa_i ইত্যাদি সাহায্যেই নির্দেশ করব)। তাহলে, (C.5) ও (C.6)-এ অজ্ঞাতরাশি হচ্ছে কেবলমাত্র Δx_i^0 $(i = 1, 2)$. কাজেই (C.5) ও (C.6) থেকে সমাধান ক'রে তাদের বীজ হিসেবে Δx_i^0 $(i = 1, 2)$ খুব সহজেই নির্ণয় করা যায়। এখন, $x_i^0 + \Delta x_i^0$ $(i = 1, 2)$-কে স্বীকার করা যায় x_i^0-এর ভ্রান্তিমুক্ত শুদ্ধমান হিসেবে। অবশ্য এই পদ্ধতিতে x_i^0-এর সবটুকু ভ্রান্তি দূর করা হয় নি। কারণ, Δm_i Δn_i-কে নগণ্য ধরার ফলে কিছুটা ভ্রান্তি এখনও রয়ে গেছে। কাজেই এই পদ্ধতি বারবার প্রয়োগ ক'রে x_i^0-কে ধীরে ধীরে ভ্রান্তিশূন্য করার চেষ্টা করা যেতে পারে।

এখন নিম্নলিখিত উদাহরণটি বিবেচনা করা যাক্।

উদা. 1.
$$\begin{aligned} 9x_1 - 2x_2 + x_3 &= 50 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 18 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 19 \end{aligned}$$

—এই সমীকরণ তিনটিতে x_1, x_2, x_3-এর সহগগুলি এবং ধ্রুবক সংখ্যাগুলি যদি প্রথম দশমিক স্থানে সংক্ষেপীকরণ-জনিত ভ্রান্তিদুষ্ট হয়, তবে সমীকরণত্রয়ের বীজ তিনটির ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ধারণ করার চেষ্টা করা যাক্।

সমীকরণ তিনটিকে একত্রে ম্যাট্রিক্সের আকারে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

অথবা
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

মনে কর দেওয়া আছে (আসলে কষে বের করা হয়েছে কিন্তু এখানে কষে দেখানো হ'ল না) যে,

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot111 & \cdot024 & \cdot081 \\ -\cdot003 & \cdot189 & \cdot073 \\ \cdot031 & \cdot036 & \cdot123 \end{pmatrix}$$

এবং সেই থেকে বের করা হ'ল যে,

$x_1 = 6\cdot15$, $x_2 = 4\cdot31$ ও $x_3 = 3\cdot24$ হচ্ছে সমীকরণগুলির বীজ।

এখন সমীকরণগুলিকে সাধারণভাবে

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

—এই আকারে লেখা যায়। এই a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ও b_i সংখ্যাগুলি (অর্থাৎ 9, -2 ইত্যাদি) সবই অখণ্ডসংখ্যা। কাজেই এদের সর্বোচ্চ চিহ্ননিরপেক্ষ ভ্রান্তির পরিমাণ হচ্ছে ·5. এখন সমীকরণগুলির বীজতিনটির শুদ্ধির পরিমাণকে Δx_i $(i = 1, 2, 3)$ লিখে আমাদের আলোচিত পদ্ধতি অনুযায়ী পাওয়া যাবে

$$a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 + a_{13}\Delta x_3 = \Delta b_1 - (x_1\Delta a_{11} + x_2\Delta a_{12} + x_3\Delta a_{13}) = R_1 \quad \text{(i)}$$

$$a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2 + a_{23}\Delta x_3 = \Delta b_2 - (x_1\Delta a_{21} + x_2\Delta a_{22} + x_3\Delta a_{23}) = R_2 \quad \text{(ii)}$$

ও
$$a_{31}\Delta x_1 + a_{32}\Delta x_2 + a_{33}\Delta x_3 = \Delta b_3 - (x_1\Delta a_{31} + x_2\Delta a_{32} + x_3\Delta a_{33}) = R_3 \quad \text{(iii)}$$

[এখানে $\Delta a_{ij} = +\cdot5$ বা $-\cdot5$ নেওয়া হবে x_i $(i = 1, 2, 3)$-এর চিহ্ন অনুযায়ী এমনভাবে যেন $|R_i|$-এর মান সর্বোচ্চ হয়]।

এখন, লক্ষণীয় যে,

$$|R_1| \leq |\Delta b_1| + |x_1\Delta a_{11} + x_2\Delta a_{12} + x_3\Delta a_{13}|$$
$$\leq |\Delta b_1| + |x_1|\cdot|\Delta a_{11}| + |x_2|\cdot|\Delta a_{12}| + |x_3|\cdot|\Delta a_{13}|.$$

তদ্রূপ, $|R_2|$ ও $|R_3|$-এর ঊর্ধ্বসীমা পাওয়া যাবে। এখন,

R_i ($i=1, 2, 3$)-কে এই তিনটি ঊর্ধ্বসীমার সর্বোচ্চ সংখ্যার সমান ধ'রে পাওয়া যাবে

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

তাহলে পাওয়া যায় $|R_i| \leqslant {}^{\cdot}5 + (3{\cdot}075 + 2{\cdot}155 + 1{\cdot}620) = 7{\cdot}350.$

এখন, আমরা ধ'রে নেব $R_i = 7{\cdot}350$ ($i=1, 2, 3$). ফলে, পাওয়া যাবে

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^{\cdot}111 & {}^{\cdot}024 & {}^{\cdot}081 \\ {}^{\cdot}003 & {}^{\cdot}189 & {}^{\cdot}073 \\ {}^{\cdot}031 & -{}^{\cdot}036 & {}^{\cdot}123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7{\cdot}35 \\ 7{\cdot}35 \\ 7{\cdot}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}5876 \\ 1{\cdot}9477 \\ {}^{\cdot}8673 \end{pmatrix}$$

অর্থাৎ, $\Delta x_1 = 1{\cdot}5876$, $\Delta x_2 = 1{\cdot}9477$ ও $\Delta x_3 = {}^{\cdot}8673$.

C.2 প্রক্ষেপণ (Interpolation) :

C.2.1 মনে কর x এবং y পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত দুটি চল। কিন্তু তাদের মধ্যে গাণিতিক কী সম্পর্ক রয়েছে তা জানা নেই অথবা জানা থাকলেও তা এত জটিল যে, এর সাহায্যে যে-কোনো x-এর জন্যে অনুগামী y-এর মানটি নির্ণয় করা অত্যন্ত দুরূহ। কিন্তু, যেমন অনেক সময়ই দেখা যায়, মনে কর x-এর কতকগুলি মান দেওয়া আছে এবং তাদের প্রত্যেকটি অনুযায়ী y-এর ততগুলো মান দেওয়া আছে। অবশ্য মানগুলির ধরণ এমন যে, এটা স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত ঐ ক'টি মান ছাড়া x ও y উভয়েরই আসলে আরও অনেক পারম্পর্যরক্ষাকারী মান রয়েছে। এ ধরনের পরিস্থিতিতে ঐ প্রদত্ত রাশিগুলির সাহায্যে চলদুটির মধ্যে অনেক সময়ই সুবিধে মতো একটি আসন্ন সম্পর্কসূত্র আবিষ্কার করা যায় এবং তার থেকে যে-কোনো যথেচ্ছগৃহীত x (বা y) মানের জন্যে y (বা x)-এর মান নিরূপণ করা যায় যাকে ঐ $x(y)$ অনুযায়ী আসল $y(x)$ মানের একটি নির্ভরযোগ্য অনুমিতি ব'লে স্বীকার করা যাবে। এই উদ্দেশ্যে যে পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় তাকে প্রক্ষেপণ পদ্ধতি (interpolation method) বলে। আমরা এখন এসম্পর্কে একটু বিস্তারিত আলোচনা করব।

দু'একটি উদাহরণ দেখা যাক্।

উদাহরণ C.2

সারণী C.1

গত জন্মদিনে বয়স বৎসর)	শতকরা মৃত্যু হার
x	y
30	9
40	13
50	23
60	37
70	58

উদাহরণ C.3

সারণী C.2

অখণ্ড সংখ্যা	অখণ্ড সংখ্যার লগ
x	$y=\log_{10}x$
654	2·8156
658	2·8182
659	2·8189
661	2·8202

এসব ক্ষেত্রে অনেকসময় একটি চলকে (মনে কর x) আমাদের মোটামুটি নিয়ন্ত্রণাধীনে এবং অপরটিকে (মনে কর y) নিয়ন্ত্রণ বহির্ভূত ব'লে মনে করা যেতে পারে। এক্ষেত্রে মনে করা হয় $y=f(x)$ অর্থাৎ কোনো অজ্ঞাত (বা অত্যন্ত জটিল আকারের) অপেক্ষক f-এর মাধ্যমে y কে x-এর সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত বলে ধরা হয়। প্রদত্ত x ও y-এর মানগুলির সাহায্যে যে সারণী প্রস্তুত করা হয় তার যে স্তম্ভে x মানগুলি থাকে তাকে বলা যেতে পারে নিয়ন্ত্রণাধীন চলের স্তম্ভ [নিধান (argument)-সারণী] এবং যে স্তম্ভে y মানগুলি থাকে, তাকে বলা যেতে পারে নির্ণেয় চলের স্তম্ভ [নির্ভরক (entry)-সারণী]। ঐ সারিবহির্ভূত কোনো নিয়ন্ত্রণাধীন মান (x) অনুসারী নির্ণেয় চল y-এর মান জানতে হলে প্রক্ষেপণ পদ্ধতি কীভাবে প্রয়োগ করতে হয়, তা এখন বর্ণনা করা হবে। এই পদ্ধতি অনুসারে f-এর স্বরূপ যাই হোক না কেন তার বদলে আমরা অপেক্ষাকৃত সহজ ও সরল অপর একটি অপেক্ষক ϕ বেছে নেব যার ধর্ম এমন যে প্রদত্ত x মানগুলির জন্মে $y=f(x)$-এর মান ও $\phi(x)$-এর মান অভিন্ন। অবশ্য অন্য x-এর জন্যে y ও $\phi(x)$-এর মান পৃথক্ হতে পারে। তাহলে, সাধারণভাবে $f(x)$ ও $\phi(x)$-এর মধ্যে তফাৎ থাকবে এবং এই পার্থক্যকে $R(x)$ বলে নির্দেশ করে আমরা স্বীকার করব যে $R(x)$ হচ্ছে $f(x)$-কে $\phi(x)$ দ্বারা পরিবর্তন-জনিত ভ্রান্তি। একে বলব ভ্রান্তি

অপেক্ষক। তাহলে আমরা পাচ্ছি $f(x)=\phi(x)+R(x)$. এখানে $f(x)$-কে বলে মূল অপেক্ষক, $\phi(x)$ হচ্ছে প্রক্ষেপণ সূত্র (interpolation formula) ও $R(x)$ হচ্ছে ভ্রান্তি বা অবশিষ্ট পদ (remainder term). যে-কোনো সারণী-বহির্ভূত x-এর জন্যে $\phi(x)$-এর মানকে y-এর অনুমিত মান বলে ধরা হবে এবং তদনুযায়ী $R(x)$-এর জ্ঞাত বা অজ্ঞাতমান হবে এই অনুমিতি জনিত ভ্রান্তি। এই পদ্ধতিকে বলা হয় প্রক্ষেপণ পদ্ধতি। সাধারণতঃ ϕ-কে এমনভাবে বেছে নেওয়া হয় যেন এটি x-এর একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক (polynomial function) হয়। এক্ষেত্রে পদ্ধতিটিকে বলা হয় বহুঘাতজ প্রক্ষেপণ পদ্ধতি। যে x-এর জন্যে y নির্ণয় করতে হবে তা যদি প্রদত্ত x-গুলির অন্তর্বর্তী কোনো মান হয়, তাহলে পদ্ধতিটি হচ্ছে অন্তঃপ্রক্ষেপণ (interpolation), এবং যদি সেটি প্রদত্ত x-গুলির সীমার বহির্বর্তী হয় তাহলে একে বহিঃপ্রক্ষেপণ (extrapolation) পদ্ধতি বলে। প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগের জন্যে প্রয়োজনীয় কয়েকটি বিষয় এখন আলোচনা করা দরকার।

মনে কর, $y=f(x)$-এর মান কেবলমাত্র সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত x মানের জন্যে দেওয়া আছে, অর্থাৎ x-এর মানগুলি হচ্ছে $x, x+h, x+2h, \cdots, (h>0)$. তাহলে আমরা লিখব $\Delta x=(x+h)-x=h$ এবং $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$. ফলে, লেখা যাবে $\Delta f(x+h)=f(x+2h)-f(x+h)$, $\Delta f(x+2h)=f(x+3h)-f(x+2h)$ ইত্যাদি। এখানে, Δ হচ্ছে একটি কার্যকারক বা প্রয়োজক (operator) যার কর্তব্য হচ্ছে φ ও x-এর পরবর্তী বর্ধিত মান $x+h$-এর জন্যে φ-এর মান $\varphi(x+h)$ থেকে φ-এর প্রথম মান $\varphi(x)$-কে বিয়োগ করা। অর্থাৎ $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x)$ এবং $\Delta\varphi(x)$-কে বলা হয়, $\varphi(x)$-এর প্রথম ক্রমপার্থক্য (1st difference). তাহলে, $\varphi(x)$ যদি ধ্রুবক হয়, অর্থাৎ যদি প্রত্যেক x-এর জন্যে $\varphi(x)=c$ হয়, তবে

$$\Delta\varphi(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x)=c-c=0. \tag{C. 7}$$

যদি $\varphi(x)=f(x)\pm g(x)$ হয়, তবে

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x)&=\varphi(x+h)-\varphi(x)=[f(x+h)\pm g(x+h)]-[f(x)\pm g(x)]\\&=[f(x+h)-f(x)]\pm[g(x+h)-g(x)]\\&=\Delta f(x)\pm\Delta g(x).\end{aligned} \tag{C. 8}$$

$$\begin{aligned}\Delta c\,\varphi(x)&=c\,\varphi(x+h)-c\,\varphi(x)=c[\varphi(x+h)-\varphi(x)]\\&=c\Delta\varphi(x).\end{aligned} \tag{C. 9}$$

$$\Delta(\Delta\varphi(x)) = \Delta[\varphi(x+h)-\varphi(x)] = \Delta\varphi(x+h)-\Delta\varphi(x)$$
$$=[\varphi(x+2h)-\varphi(x+h)]-[\varphi(x+h)-\varphi(x)]$$
$$=\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x).$$

$\Delta(\Delta\varphi(x))$-কে আমরা $\Delta^2\varphi(x)$ লিখব। তাহলে, Δ^2 এই প্রয়োজকের সংজ্ঞা হচ্ছে এই যে,

$$\Delta^2\varphi(x) = \varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x).$$

$\Delta^2\varphi(x)$-কে বলে $\varphi(x)$ অপেক্ষকের দ্বিতীয় ক্রমপার্থক্য। তেমনি Δ^3 হচ্ছে সেই প্রয়োজক যার জন্যে

$$\Delta^3\varphi(x) = \Delta(\Delta^2\varphi(x)) = \Delta^2(\Delta\varphi(x))$$

ও ফলে, $\Delta^3\varphi(x) = \Delta[\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)]$

$$=\Delta\varphi(x+2h)-2\Delta\varphi(x+h)+\Delta\varphi(x)$$
$$=\varphi(x+3h)-\varphi(x+2h)-2\varphi(x+2h)+2\varphi(x+h)+\varphi(x+h)-\varphi(x)$$
$$=\varphi(x+3h)-3\varphi(x+2h)+3\varphi(x+h)-\varphi(x).$$

এই $\Delta^3\varphi(x)$-কে $\varphi(x)$-এর তৃতীয় ক্রমপার্থক্য বলা হয়।

সাধারণভাবে,

$$\Delta^n\varphi(x) = \Delta^{n-1}(\Delta\varphi(x)) = \Delta^{n-2}(\Delta^2\varphi(x)) = \cdots = \Delta(\Delta^{n-1}\varphi(x))$$
$$=\varphi(x+nh)-\binom{n}{1}\varphi(x+\overline{n-1}h)+\binom{n}{2}\varphi(x+\overline{n-2}h)-\cdots+(-1)^n\varphi(x).$$

এই $\Delta^n\varphi(x)$-কে বলে $\varphi(x)$ অপেক্ষকের n-তম ক্রমপার্থক্য

এবং $\Delta^{m+n}\varphi(x) = \overbrace{\Delta\cdots\Delta}^{m}(\overbrace{\Delta\cdots\Delta}^{n}\ \varphi(x))$

$$=\overbrace{\Delta\cdots\Delta}^{m}\ \Delta^n\varphi(x) = \Delta^m\Delta^n\varphi(x).$$

কোন অপেক্ষক $\varphi(x)$ ও তার বিভিন্ন ক্রমিক পার্থক্যগুলিকে নিম্নলিখিত সারণী সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। একে বলে পার্থক্য-সারণী (Difference Table)।

পার্থক্য-সারণী

x	$\varphi(x)$	$\Delta\varphi(x)$	$\Delta^2\varphi(x)$	$\Delta^3\varphi(x)$	$\Delta^4\varphi(x)$
⋮					
a	$\varphi(a)$				
		$\Delta\varphi(x)$			
$a+h$	$\varphi(a+h)$		$\Delta^2\varphi(a)$		
		$\Delta\varphi(a+h)$		$\Delta^3\varphi(x)$	
$a+2h$	$\varphi(a+2h)$		$\Delta^2\varphi(a+h)$		$\Delta^4\varphi(a)$
		$\Delta\varphi(a+2h)$		$\Delta^3\varphi(a+h)$	⋮
$a+3h$	$\varphi(a+3h)$		$\Delta^2\varphi(a+2h)$	⋮	⋮
		$\Delta\varphi(a+3h)$	⋮	⋮	⋮
$a+4h$	$\varphi(a+4h)$	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮				

একটি সংখ্যাভিত্তিক উদাহরণ (Numerical Example) দেওয়া যাক।

উদাহরণ C.4

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
2	7				
		4			
3	11		2		
		6		−2	
4	17		0		11
		6		9	
5	23		9		
		15			
6	38				

পার্থক্য-সারণীতে φ অপেক্ষকের প্রথম মান $\varphi(a)$-কে বলে প্রধানপদ (leading term) এবং ঐ পদের পার্থক্যগুলিকে (অর্থাৎ $\Delta\varphi(a)$, $\Delta^2\varphi(a)$, $\Delta^3\varphi(a),\cdots$) বলে প্রধান পার্থক্যপদ (leading differences).

অনেকটা Δ, Δ^2, $\Delta^3,\cdots$ ইত্যাদির মতো আরও এক শ্রেণীর প্রয়োজক অনেক সময় ব্যবহার করা হয় এবং তাদেরকে E, E^2, $E^3,\cdots$ সংকেত সূত্র সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

মনে কর, $\varphi(x)$-এর $\varphi(a)$, $\varphi(a+h)$, $\varphi(a+2h)$, $\varphi(a+3h)$, ইত্যাদি মান

দেওয়া আছে। তাহলে, E, E^2, E^3 ইত্যাদি সংজ্ঞানুযায়ী হচ্ছে এমন যে, $E\psi(a)=\psi(a+h)$, $E\psi(a+h)=\psi(a+2h)$, $E\psi(a+2h)=\psi(a+3h)$ ইত্যাদি। $E^2\psi(a)=E(E\psi(a))=E\psi(a+h)=\psi(a+2h)$; $E^2\psi(a+h)=E(E\psi(a+h))$ $=E(\psi(a+2h))=\psi(a+3h)$ ইত্যাদি।

$E^3\psi(a)=E^2(E\psi(a))=E^2(\psi(a+h))=\psi(a+3h)$

অথবা $E^3\psi(a)=E(E^2\psi(a))=E(\psi(a+2h))=\psi(a+3h)$ ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $E^n\psi(a)=\psi(a+nh)$. উল্লেখ্য যে,

$E^{-1}\psi(x)=\psi(x-h),\ E^{-2}\psi(x)=\psi(x-2h),\ldots,\ E^{-n}\psi(x)=\psi(x-nh).$

এখন যদি, ϕ, ψ, ξ ইত্যাদি কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন অপেক্ষক থাকে, তাহলে

(i) $E(\phi(x)\pm\psi(x)\pm\xi(x)\pm\cdots)=E\phi(x)\pm E\psi(x)\pm E\xi(x)\pm\cdots$

(ii) $Ec\phi(x)=[c\phi(x+h)]=cE\phi(x)$

(iii) $$E^{m+n}\phi(x)=\overbrace{E\cdots E}^{m}\ \overbrace{E\cdots E}^{n}\phi(x)$$

$$=\overbrace{E\cdots E}^{m}\ E^n\phi(x)=\overbrace{E\cdots E}^{m}\phi(x+nh)$$

$$=E^m\phi(x+nh)=\phi(x+\overline{m+n}h)$$

(iv) $E^n\phi(x)\psi(x)=\phi(x+nh)\psi(x+nh).$

এই সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা খুব সহজ বলে প্রমাণ এখানে দেওয়া হ'ল না।

এখন, সহজেই লক্ষণীয় যে, $\Delta, \Delta^2, \Delta^3$ ইত্যাদি এবং E, E^2, E^3 ইত্যাদির মধ্যে খুব ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ রয়েছে।

কারণ, $\Delta\phi(x)=\phi(x+h)-\phi(x)=E\phi(x)-\phi(x)=(E-1)\phi(x).$

এখানে 1 চিহ্নদ্বারা একটি প্রয়োজক নির্দেশ করা হচ্ছে যার সংজ্ঞা হচ্ছে এমন যে, $1\phi(x)=\phi(x)$. তাহলে, আমরা বলতে পারি যে, Δ ও $(E-1)$ হচ্ছে প্রয়োজক হিসেবে অভিন্ন। এই ব্যাপারটিকে আমরা প্রকাশ করি $\Delta=E-1$ এই সংকেতসূত্রে। এক্ষেত্রে অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে, এটি কোন বীজগাণিতিক সমীকরণ নয়। Δ বা E-এর কোন মান নেই। এর অর্থ হ'ল এই যে, প্রয়োজক হিসেবে Δ ও $(E-1)$-এর একই ভূমিকা, অর্থাৎ

$\Delta\phi(x)=\phi(x+h)-\phi(x)$ এবং $(E-1)\phi(x)=E\phi(x)-\phi(x)$
$=\phi(x+h)-\phi(x),$

$\Delta^2\phi(x)=\phi(x+2h)-2\phi(x+h)+\phi(x)$
$=E^2\phi(x)-2E\phi(x)+\phi(x)=(E^2-2E+1)\phi(x)$ ইত্যাদি।

কাজেই বলা যায় যে, প্রয়োজক হিসেবে Δ^2 ও (E^2-2E+1) হচ্ছে অভিন্ন এবং সেজন্যেই আমরা লিখব $\Delta^2=E^2-2E+1=(E-1)^2$.

তেমনি, $\Delta^3\phi(x)=\phi(x+3h)-3\phi(x+2h)+3\phi(x+h)-\phi(x)$

$$=E^3\phi(x)-3E^2\phi(x)+3E\phi(x)-1.\phi(x)$$
$$=(E^3-3E^2+3E-1)\phi(x)=(E-1)^3\phi(x),$$

এবং স্বভাবতঃই আমরা লিখব $\Delta^3=(E^3-3E^2+3E-1)=(E-1)^3$.

সাধারণভাবে,

$$\Delta^n=(E-1)^n=E^n-\binom{n}{1}E^{n-1}+\binom{n}{2}E^{n-2}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}E+(-1)^n 1.$$

তাহলে, যদি x-এর $a, a+h, a+2h, \ldots, a+(n-1)h, a+nh$, এই কটি মানের জন্যে $\psi(x)$-এর মান $\psi(a), \psi(a+h), \psi(a+2h), \ldots, \psi(a+n-1h)$, $\psi(a+nh)$ দেওয়া থাকে, তাহলে, পার্থক্য-সারণী রচনা না ক'রেও যে কোন ক্রমের পার্থক্যমান নির্ণয় করা সম্ভব। কারণ,

$$\Delta^n\psi(a)=(E-1)^n\psi(a)=[E^n-\binom{n}{1}E^{n-1}+\binom{n}{2}E^{n-2}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}E\psi+(-1)^n 1]\psi(a)$$
$$=E^n\psi(a)-\binom{n}{1}E^{n-1}\psi(a)+\binom{n}{2}E^{n-2}\psi(a)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}E\psi(a)+(-1)^n 1\psi(a)$$
$$=\psi(a+nh)-\binom{n}{1}\psi(a+\overline{n-1}h)+\binom{n}{2}\psi(a+\overline{n-2}h)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\psi(a+h)+(-1)^n\psi(a).$$

এখন, মনে কর $\phi(x)$ হচ্ছে x-এর একটি n-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক। তাহলে, আমরা লিখতে পারব যে,

$$\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n x^n.$$

তাহলে, $\Delta\phi(x)=\phi(x+h)-\phi(x)$

$$=[a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots$$
$$+a_{n-1}(x+h)^{n-1}+a_n(x+h)^n]$$
$$-[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n x^n]$$

$$= a_1 h + a_2(2hx + h^2) + \cdots$$
$$+ a_n \left[n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots\right]$$
$$= a_n nh\, x^{n-1} + P_{n-2}(x)$$ (ধর, যাতে $P_{n-2}(x)$ একটি $(n-2)$-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক).

$$\Delta^2 \phi(x) = a_n nh\, [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \Delta P_{n-2}(x)$$
$$= a_n\, ^n(n-1)h^2 x^{n-2} + \Delta P_{n-2}(x) + F_{n-3}(x).$$

[ধর, যাতে $F_{n-3}(x)$ একটি $(n-3)$-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক].

আমরা দেখলাম যে, $\phi(x)$ হচ্ছে n-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক ও $\Delta\phi(x)$ হচ্ছে $(n-1)$-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক। তাহলে, স্পষ্টতঃই $P_{n-2}(x)$ একটি $(n-2)$ ক্রমিক বহুঘাতজ হওয়ার ফলে $\Delta P_{n-2}(x)$ হবে $(n-3)$-ক্রমিক বহুঘাতজ।

অর্থাৎ,

$\Delta^2 \phi(x) = a_n\, n(n-1)h^2 x^{n-2} + L_{n-3}(x)$ (ধর, যাতে $L_{n-3}(x)$ একটি $(n-3)$-ক্রমিক বহুঘাতজ).

$$\Delta^3 \phi(x) = a_n\, n(n-1)h^2[(x+h)^{n-2} - x^{n-2}] + \Delta L_{n-3}(x)$$
$$= a_n\, n(n-1)(n-2)h^3 x^{n-3} + \chi_{n-4}(x),$$ যাতে $\chi_{n-4}(x)$ একটি $(n-4)$-ক্রমিক বহুঘাতজ, ইত্যাদি।

তেমনিভাবে পাওয়া যাবে

$$\Delta^{n-1}\phi(x) = an\; n(n-1)\cdots\cdots 3.2.1 h^{n-1} x + c_0(x)$$

[এখানে, $c_0(x)$ একটি ধ্রুবক, অর্থাৎ x থেকে মুক্তরাশি।]

সুতরাং $\Delta^n \phi(x) = a_n\, n\,!\; h^n =$ ধ্রুবক $= c$ (মনে কর)।

সুতরাং $\Delta^{n+1}\phi(x) = 0$ এবং সাধারণভাবে, $s > 1$ হলে,

$\Delta^{n+s}\phi(x) = 0$, যদি ϕ n-ঘাতজ অপেক্ষক হয়।

কাজেই, দেখা যাচ্ছে যে, $\phi(x)$ যদি n-ক্রমিক বহুঘাতজ হয়।

তবে, $\Delta^n \phi(x) =$ ধ্রুবক (C. 10)

$\Delta^r \phi(x) = 0,\; r > n$ হলে (C. 11)

এবং $\Delta^r \phi(x) = (n-r)$-ক্রমিক বহুঘাতজ, $r < n$ হলে। (C. 12)

এর থেকে বলা যায় যে, যদি কোন বহুঘাতজ অপেক্ষকের n-তম পার্থক্য ধ্রুবক (শূন্য নয়) হয়, তাহলে বহুঘাতজটির ঘাত হবে n. কারণ, যদি প্রকৃত

ঘাত r-এর মান n-এর চেয়ে বেশী হয়, তাহলে, $\Delta^n\phi(x) \neq$ ধ্রুবক, কারণ এটি একটি $(r-n)$-তম বহুঘাতজ। যদি r-এর মান n-এর চেয়ে কম হয়, তাহলে $\Delta^n\phi(x) = 0$ সুতরাং $r = n$, কারণ $\Delta^n\phi(x)$ ধ্রুবক (শূন্য নয়), যদি $r = n$ হয়।

উদা. C.5 যদি u_n একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক হয়, তবে $n > 1$ হলে,

$$u_n - \binom{n}{1}u_{n-1} + \binom{n}{2}u_{n-2} - \cdots + (-1)^n u_0 = 0,$$

কারণ,

$$u_n - \binom{n}{1}u_{n-1} + \binom{n}{2}u_{n-2} - \cdots + (-1)^n u_0$$

$$= E^n u_0 - \binom{n}{1} E^{n-1}u_0 + \binom{n}{2}E^{n-2}u_0 - \cdots + (-1)^n u_0$$

$$= \left(E^n - \binom{n}{1}E^{n-1} + \binom{n}{2}E^{n-2} - \cdots + (-1)^n\right)u_0$$

$= (E-1)^n u_0 = \Delta^n u_0 = 0$, কারণ u_x একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক, $u_0 =$ ধ্রুবক ও ফলে $\Delta^n u_0 = 0$.

উদা. C.6 যে কোন অপেক্ষক u_x-এর জন্যে দেখাও যে,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_{-1} + \Delta^2 u_{-2} + \Delta^3 u_{-3} + \cdots$$

অভেদটির দক্ষিণপার্শ্ব হচ্ছে

$$u_0 + \Delta E^{-1}u_0 + \Delta^2 E^{-2}u_0 + \cdots$$

$$= [1 + \Delta E^{-1} + \Delta^2 E^{-2} + \cdots]u_0$$

$$= [1 + \Delta E^{-1} + (\Delta E^{-1})^2 + \cdots]u_0$$

$$= (1 - \Delta E^{-1})^{-1} u_0 = \left(1 - \frac{\Delta}{E}\right)^{-1} u_0 = Eu_0 = u_1.$$

C.2.2 নিউটনের পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র (Newton's forward interpolation formula) :

মনে কর, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ হচ্ছে x-এর সমান্তরবিশিষ্ট $(n+1)$টি মান যাদের সাধারণ অন্তর

$x_i - x_{i-1} = h > 0, i = 1, \ldots, n$ (অর্থাৎ $x_i = x_0 + ih$, $x_j - x_i = (j-i)h, j > i$) এবং $y = f(x)$ হচ্ছে x-এর যে কোন অপেক্ষক, যার x অনুসারী মানগুলি হচ্ছে যথাক্রমে $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ অর্থাৎ $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. ধরা হচ্ছে যে, x ও y-এর সমস্ত মানের

মধ্যে কেবল এই $(n+1)$ জোড়া মানই দেওয়া আছে, কিন্তু এদের পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধে আর কিছু জানা নেই। এক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ পদ্ধতির সাহায্যে x_0-এর নিকটবর্তী কোন মানের জন্মে যদি $f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে হয় তাহলে নিউটনের অগ্রবর্তী বা পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র (Forward interpolation formula) প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। ঐ মানটি যদি x_0 -এর চেয়ে কম হয় তাহলে এটি হবে বহিঃপ্রক্ষেপণের ব্যাপার। এই সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করতে গিয়ে প্রথমে দেখা যাবে যে, প্রদত্ত পদগুলির সাহায্যে $f(x)$-এর n-তম পর্যন্ত ক্রমিক পার্থক্য নির্ণয় করা যায়, তার বেশী পারা যায় না। এর থেকে ধ'রে নেওয়া হয় যে, মূল $f(x)$ অপেক্ষকটির n-ক্রমিক পার্থক্য হচ্ছে ধ্রুবক অর্থাৎ আমরা ন্যায়সঙ্গতভাবে ধরে নিই যে, $\phi(x)$ হচ্ছে n-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক। এই $\phi(x)$-ই হচ্ছে আমাদের নির্ণেয় প্রক্ষেপণ সূত্র। এখন $\phi(x)$ অপেক্ষকটিকে নির্ণয় করতে হবে এবং প্রক্ষেপণবিধি অনুযায়ী এটিকে এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যেন, $f(x)=\phi(x)+R(x)$ লিখলে যে কোন x-এর জন্মে $R(x)$-এর মান যাই হোক্ না কেন

$x=x_i (i=0, 1, \ldots, n)$ হলে $f(x_i)=\phi(x_i)$ হবেই, অর্থাৎ $x=x_i (i=0, 1, \ldots, n)$ হলে $R(x_i)=0$. তাহলে, নিউটনের নির্দেশ অনুসরণে আমরা লিখ্‌ব

$$\phi(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

এটি একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক এবং এর অন্তর্গত $a_0, a_1, \ldots, a_n$—এই ধ্রুবকগুলি এমনভাবে নির্ণীত যেন,

$$i=0, 1, \ldots, n\text{-এর জন্মে } y_i=f(x_i)=\phi(x_i) \text{ হয়।}$$

এখন, $y_0=\phi(x_0)=a_0,$

$y_1=\phi(x_1)=a_0+a_1h.$

তাই, $a_1=\dfrac{y_1-a_0}{h}=\dfrac{y_1-y_0}{h}=\dfrac{\Delta y_0}{h}.$

$$y_2=a_0+a_1(2h)+a_2(2h)(h)=a_0+2ha_1+2h^2a_2.$$
$$=y_0+2h\frac{\Delta y_0}{h}+2h^2a_2=y_0+2\Delta y_0+2h^2a_2$$
$$=2y_1-y_0+2h^2a_2.$$

তাই, $a_2 = \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2!\,h^2} = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$.

$$y_3 = \phi(x_3) = a_0 + a_1(3h) + a_2(3h)(2h) + a_3(3h)(2h)(h)$$
$$= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + 6h^3 a_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0 + 6h^3 a_3.$$

তাই, $a_3 = \dfrac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3} = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}$.

এইভাবে অগ্রসর হয়ে পাওয়া যাবে

$$a_r = \frac{\Delta^r y_0}{r!\,h^r},\ r = 4, \ldots, n-1, \text{ এবং } a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h_n}.$$

তাহলে দাঁড়ালো এই যে,

$$\phi(x) = y_0 + \Delta y_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\left(\frac{x-x_2}{h}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right).$$

এখন, মনে কর, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$; তাহলে, $x = x_0 + hu$,

$$x - x_1 = (x_0 + hu) - (x_0 + h) = h(u-1)$$
$$x - x_2 = (x_0 + hu) - (x_0 + 2h) = h(u-2)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$x - x_{n-1} = (x_0 + hu) - (x_0 + \overline{n-1}h) = h(u - n + 1).$$

$$\phi(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$
$$+ \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (\text{C. } 13)$$

একেই বলে নিউটনের পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র। একে পুরোগামী বলার কারণ এই যে, এই সূত্রটি সারণীস্থিত মানগুলির প্রথমটি অর্থাৎ y_0 এবং পর্যায়ক্রমে তার পরবর্তী মানগুলির মাধ্যমে প্রকাশিত।

C.2.3 নিউটনের পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণ সূত্র (Newton's backward interpolation formula) :

মনে কর, $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n$ $[x_i - x_{i-1} = h > 0,\ i = 1, \ldots n\,;\ x_i = x_0 + hi,\ x_j - x_i = (j-i)h]$ হচ্ছে x-এর $(n+1)$ সংখ্যক সমান্তর-

বিশিষ্ট মান ও $y_0, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_{n-1}, y_n$ হচ্ছে যথাক্রমে $y=f(x)$-এর সংশ্লিষ্ট মান অর্থাৎ $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$. এছাড়া x ও $f(x)$-এর আরও মান আছে কিন্তু তাদের পারস্পরিক মান জানা নেই এবং x-এর অপেক্ষক হিসেবে $f(x)$-এর রূপ সম্পর্কেও আর কিছু জানা নেই। তাহলে এই $(n+1)$ জোড়া মানের সাহায্যে প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগে যদি x_n-এর নিকটবর্তী কোন মানের জন্যে $f(x)$-এর মান নির্ণয় করতে হয়, তাহলে নিউটনের পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণ সূত্র ব্যবহার করা হয়। এখন, $(n+1)$-সংখ্যক মানের ভিত্তিতে $y=f(x)$-এর সর্বাধিক n-তম ক্রমিক পার্থক্য নির্ণয় করা যায়। তাই ধরে নেওয়া হয় যে, $f(x)$-এর n-ক্রমিক পার্থক্য হচ্ছে ধ্রুবক। এখন, $f(x)$-এর বদলে যদি একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ গ্রহণ করা হয়, তাহলে $\phi(x)$-এর n-ক্রমিক পার্থক্য ধ্রুবক হবে ও সেইজন্যে $\phi(x)$-কে একটি n-ক্রমিক বহুঘাতজ অপেক্ষক বলে ধ'রে নেওয়া হবে। এখন, $f(x)=\phi(x)+R(x)$ লিখলে $R(x)$ হচ্ছে অবশিষ্ট পদ এবং x-এর যে কোন মানের জন্যে $R(x)$-এর মান যাই হোক্ না কেন $x=x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ হলে $R(x_i)=0$ হবে কারণ এই কটি মানের জন্যে প্রক্ষেপণবিধি অনুযায়ী $f(x)=\phi(x)$. এখন, নিউটনের অনুসরণে $\phi(x)$-কে লিখব

$$\phi(x)=b_0+b_1(x-x_n)+b_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\cdots$$
$$+b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1).$$

স্পষ্টতঃই $\phi(x)$ হচ্ছে n-ঘাতজ অপেক্ষক। এর নিয়ামক $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ধ্রুবক কটিকে এমন ভাবে বেছে নিতে হবে যেন, $i=0, 1, \ldots, n$-এর জন্যে $f(x_i)=\phi(x_i)$ হয়। তাহলে $\phi(x)$ অপেক্ষকটি সম্পূর্ণ নির্ণীত হবে। এখন,

$$y_n=\phi(x_n)=b_0,$$
$$y_{n-1}=\phi(x_{n-1})=b_0+b_1(-h)=y_n-hb_1\ ;$$

ফলে, $$b_1=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=\frac{\Delta y_{n-1}}{h}\ ;$$

$$y_{n-2}=\phi(x_{n-2})=b_0+b_1(-2h)+b_2(-2h)(-h)$$
$$=y_n-2\Delta y_{n-1}+2h^2b_2\ ;$$

ফলে, $$b_2=\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{2!\,h^2}=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}\ ;$$

$$y_{n-3} = \phi(x_{n-3}) = b_0 + b_1(-3h) + b_2(-3h)(-2h) + b_3(-3h)(-2h)(-h) = y_n - 3\Delta y_{n-1} + 3\Delta^2 y_{n-2} - 6h^3 b_3$$
$$= y_n - 3y_n + 3y_{n-1} + 3y_n - 6y_{n-1} + 3y_{n-2} - 6h^3 b_3.$$

সুতরাং $\quad b_3 = \frac{1}{6h^3}\left(y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} \right) = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\, h^3}.$

এইভাবে অগ্রসর হয়ে পাওয়া যাবে

$$b_r = \frac{\Delta^r y_{n-r}}{r!\, h^r},\ r = 4, 5, \ldots \text{ এবং } b_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}.$$

তাই
$$\phi(x) = y_n + \Delta y_{n-1}\left(\frac{x-x_n}{h}\right) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}\left(\frac{x-x_n}{h}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}\left(\frac{x-x_n}{h}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{n-2}}{h}\right) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\left(\frac{x-x_n}{h}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_1}{h}\right).$$

এখন, সুবিধেমতো লেখা হবে $u = \frac{x-x_n}{h}$.

তাহলে, $x = x_n + hu,\ x - x_{n-1} = h(u+1),$

$x - x_{n-2} = h(u+2)$, ইত্যাদি।

তাই,
$$\phi(x) = y_n + u\Delta y_{n-1} + \frac{(u+1)u}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{(u+2)(u+1)u}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots + \frac{(u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)u}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (\text{C. }14)$$

এটিই হচ্ছে নিউটনের পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণ সূত্র। একে পশ্চাৎগামী বলার কারণ হচ্ছে এই যে, এই সূত্র সারণীস্থিত শেষ পদ y_n থেকে সুরু ক'রে তার পশ্চাৎবর্তী পদগুলির সমবায়ে গঠিত।

উদাহরণ C.7 নীচের সারণীতে প্রদত্ত তথ্য ব্যবহার ক'রে যথাযথ প্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগে 37 ও 66 বৎসর বয়স্ক ব্যক্তিবর্গের মৃত্যুহারের আসন্ন মান নির্ণয় কর।

সারণী C.3

বয়স (বৎসর) (গত জন্মদিনে)	শতকরা মৃত্যুহার
x	$f(x)$
30	9
40	13
50	23
60	37
70	58

এই উদাহরণে 37 হচ্ছে সারণীতে প্রদত্ত অনধীন x চলটির (বয়স) প্রথম দিকের মান। তাই 37 বৎসর বয়স্ক ব্যক্তিবর্গের মৃত্যুহার নির্ণয়ে নিউটনের পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র ব্যবহার করাই সঙ্গত। তেমনি 66 হচ্ছে সারণীটির শেষের দিকের মান। তাই 66 বৎসর বয়স্ক ব্যক্তিবর্গের মৃত্যুহার নির্ণয়ে নিউটনের পশ্চাৎগামী সূত্র ব্যবহারই যথাযথ। এই দুটি সূত্র প্রয়োগের জন্যেই নিম্নলিখিত পার্থক্য-সারণী গঠন করতে হবে।

সারণী C.4

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
30	9				
		4			
40	13		6		
		10		−2	
50	23		4		5
		14		3	
60	37		7		
		21			
70	58				

প্রথম ক্ষেত্রে, $u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{37 - 30}{10} = \cdot 7$

তাহলে নিউটনের পুরোগামী সূত্র অনুসারে, $f(37)$-এর আসন্ন মান

দাঁড়াবে $\phi(37) = f(30) + 4\Delta f(30) + \dfrac{4(4-1)}{2!}\Delta^2 f(30)$

$$\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}\Delta^3 f(30) + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}\Delta^4 f(30) +$$

অর্থাৎ $\phi(37) = 9 + {\cdot}7 \times 4 + ({\cdot}7) + (-{\cdot}3)\frac{1}{2} \times 6$

$$+ \frac{{\cdot}7 \times (-{\cdot}3) \times (-1{\cdot}3)}{6} \times (-2) + {\cdot}7 \times ({\cdot}3) \times (-1{\cdot}3) \times (-2{\cdot}3) \times \tfrac{1}{24} \times 5$$

$$= 10{\cdot}95 \simeq 11.$$

এখন, $f(66)$-এর আসন্ন মান $\phi(66)$ নিউটনের পশ্চাৎগামী সূত্র অনুসরণ ক'রে নিজে নির্ণয় কর।

C.2.4 লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণ সূত্র (Lagrange's interpolation formula) :

মনে কর x ও y দুটি চল এবং $y = f(x)$ হচ্ছে x-এর একটি অপেক্ষক। এখন ধর x-এর যে কোন $(n+1)$ সংখ্যক মান $x_0, x_1, \ldots, x_n$ এবং তাদের অনুসারী $y = f(x)$-এর $(n+1)$ সংখ্যক মান, যথাক্রমে $y_0, y_1, \ldots y_i, \ldots, y_n$, দেওয়া আছে। এখন, এই $(n+1)$ জোড়া মানের সাহায্যে x-এর যে কোন মানের জন্যে যদি $y = f(x)$ এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী নির্ণয় করতে হয়, তাহলে সাধারণতঃ লাগ্রাঞ্জের পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়। ওপরে বর্ণিত নিউটনের সূত্র দুটি এস্থলে অচল, কারণ x-এর প্রদত্ত মানগুলি এখন আবশ্যিকভাবে সমান্তর শ্রেণীভুক্ত নয়। এই লাগ্রাঞ্জের সূত্রটি এখন আমরা বর্ণনা করব। যেহেতু $y = f(x)$-এর মাত্র $(n+1)$ সংখ্যক মান জানা আছে, প্রক্ষেপণবিধি অনুযায়ী এর পরিবর্তে যদি একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ গ্রহণ করা হয়, তাহলে $\phi(x)$-এর ঘাত সর্বাধিক n বলে ধরা যেতে পারে, কারণ $(n+1)$ সংখ্যক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে n-এর অধিকমান সম্পন্ন নির্দিষ্ট বহুঘাতজ রেখাকে (fixed polynomial curve) অতিক্রম করানো যায় না। কাজেই আমরা ধ'রে নেব যে, $\phi(x)$ হচ্ছে একটি n ঘাতজ অপেক্ষক এবং লিখ্‌ব $f(x) = \phi(x) + R(x)$, যাতে $R(x)$ হচ্ছে অবশিষ্ট অপেক্ষক অর্থাৎ প্রক্ষেপণের পর উদ্বৃত্ত অপেক্ষক যার মান যে কোন x-এর জন্যে যাই হোক্ না কেন $R(x) = 0$,

যখন $x=x_i(i=0, 1,\ldots n)$ অর্থাৎ $x=x_i(i=0, 1,\ldots, n)$ হলে $f(x_i)=\phi(x_i)$. এখন লাগ্রাঞ্জের অনুসরণে লিখ্‌ব

$$\begin{aligned}\phi(x)=c_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\ +c_1(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\ +c_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ +c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).\end{aligned}$$

স্পষ্টতঃই $\phi(x)$ হচ্ছে একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক। এর নিয়ামক ধ্রুবকগুলি অর্থাৎ $c_0, c_1,\ldots, c_n$-কে এমনভাবে বের করতে হবে যাতে $x=x_i(i=0, 1,\ldots, n)$ হলে $y_i=f(x_i)=\phi(x_i)$ হয়। তাহলে আমরা পাব

$$y_0=\phi(x_0)=c_0(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n).$$

স্নুতরাং $$c_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)},$$

$$y_1=\phi(x_1)=c_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n).$$

স্নুতরাং $$c_1=\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}.$$

এমনিভাবে অগ্রসর হয়ে পাওয়া যায়

$$y_n=\phi(x_n)=c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_n-1).$$

স্নুতরাং $$c_n=\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

তাই সবশেষে পাওয়া গেল

$$\begin{aligned}\phi(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\,y_0\\ +\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\,y_1\\ +\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\cdots(x-x_n)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\cdots(x_r-x_{r-1})(x_r-{}_{r+1})\cdots(x_r-x_n)}\,y_r\\ +\cdots+\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}\,y_n. \qquad (\text{C. }15)\end{aligned}$$

একেই বলে লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণ সূত্র। একে অনেক সময় প্রয়োগের সুবিধার্থে নিম্নলিখিত আকারেও প্রকাশ করা হয় :

$$\frac{\phi(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}$$

$$=\frac{y_0}{(x-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$+\frac{y_1}{(x-x_1)(x_1-x_0)\cdots(x_1-x_n)}+\cdots$$

$$+\frac{y_r}{(x-x_r)(x_r-x_0)\cdots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\cdots(x_r-x_n)}+\cdots$$

$$+\frac{y_n}{(x-x_n)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \qquad (\text{C}.16)$$

অঙ্ক কষবার সুবিধের দিক্ থেকে লাগ্রাঞ্জের সূত্রের এই দ্বিতীয় রূপটিই উৎকৃষ্টতর।

লাগ্রাঞ্জের সূত্রের কয়েকটি সুবিধে হচ্ছে এই যে, (1) এতে প্রদত্ত y মানগুলি x-এর সমান্তর শ্রেণীভুক্ত মান অনুসারী হবার দরকার নেই। x-এর যে কোন কয়েকটি মানের জন্যেই যদি y-এর মান জানা থাকে, তবে তার সাহায্যে x-এর যে কোন অপ্রদত্ত মানের জন্যে y এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী স্থির করা যায় ; (2) এই সূত্র প্রয়োগে পার্থক্য সারণী গঠনের প্রয়োজন নেই ; (3) তৃতীয়তঃ এর পর্যাবৃত্তি ধর্ম রয়েছে অর্থাৎ প্রদত্ত (x_i, y_i) মানগুলি থেকে যেমন সারণী বহির্ভূত x-এর জন্যে y এর মান নির্ণয় করা যায় তেমনি সারণী বহির্ভূত যে কোন y মানের জন্যে x-এর মানও নির্ণয় করা যায়। কারণ, y-কে x-এর অপেক্ষক $f(x)$ রূপে গণ্য করার পরিবর্তে যদি x-কে y-এর অপেক্ষক $g(y)$ বলে ধরা যায়, তাহলে যে কোন y-এর অনুগামী x-এর মান নির্ণয়ের জন্যে প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে গিয়ে $g(y)$-কে একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক $\psi(y)$ দিয়ে পরিবর্তিত ক'রে লাগ্রাঞ্জের সূত্র প্রয়োগ ক'রে পাওয়া যাবে

$$\psi(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\cdots(y_0-y_n)}x_0$$

$$+\frac{(y-y_0)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y-y_0)(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_n)}x_1$$

$$+\cdots+\frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\cdots(y_n-y_{n-1})}x_n.$$

কিন্তু, লাগ্রাঞ্জের সূত্রপ্রয়োগের অসুবিধে হচ্ছে এই যে, এর গঠন বেশ একটু জটিল এবং অঙ্ক কষবার পক্ষে এর রূপটি খুব সন্তোষজনক নয়। দ্বিতীয়তঃ এর বিভিন্ন পদের চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক সেটি স্থির করতে গিয়ে অনেক সময়ই ভুল হবার সম্ভাবনা থাকে এবং এবিষয়ে খুব সতর্ক না হলে হিসেবে ভুল করার যথেষ্ট সুযোগ থেকে যেতে পারে।

উদা. C.8 u_x অপেক্ষকের নিম্নলিখিত মানগুলি ব্যবহার ক'রে উপযুক্ত প্রক্ষেপণ-পদ্ধতি অনুসরণ ক'রে u_3-এর মান নির্ণয় কর :

x :	0	2	5	10
u_x :	3	19	73	223

এখানে লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণসূত্র প্রয়োগ করা যেতে পারে। তাহলে আমরা পাব

$$\frac{u_3}{(3-0)(3-2)(3-5)(3-10)}=\frac{3}{(3-0)(0-2)(0-5)(0-10)}$$

$$+\frac{19}{(3-2)(2-5)(2-10)(2-5)}+\frac{73}{(3-5)(5-0)(5-2)(5-10)}$$

$$+\frac{223}{(3-10)(10-0)(10-2)(10-5)}.$$

এর থেকে সরল ক'রে পাই $u_3=33{\cdot}3$.

C.2.5 বিভক্ত পার্থক্য সূত্র (divided difference formula) :

লাগ্রাঞ্জের সূত্রের সবচেয়ে বড় সুবিধে হচ্ছে এই যে, যখন (x, y) চল দুটির একটিও সমান্তরশ্রেণীভুক্ত নয়, তখনও একটির জন্যে অপরটি প্রক্ষেপণ সাহায্যে নির্ণয়ের জন্যে এর প্রয়োগ সম্ভব। কিন্তু এ ব্যাপারে এইটিই একমাত্র উপায় নয়। x মানগুলি যখন সমান্তরবিশিষ্ট নয় তখনও y-এর মান প্রক্ষেপণ সাহায্যে নির্ণয়ে আর একটি পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় যাতে এক নতুন ধরনের পার্থক্য প্রয়োজকের (difference operator) অবতারণা করা হয়ে থাকে।

মনে কর $x_0, x_1, x_2, x_3 \cdots$, ইত্যাদি হচ্ছে x-এর কয়েকটি বিভিন্ন মান এবং $y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots$ হচ্ছে x-এর অপেক্ষক $y=f(x)$-এর যথাক্রমিক মান অর্থাৎ $y_i=f(x_i)$,, $i=0, 1, 2, 3, \cdots$. তাহলে,

$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f(x_j, x_i)$ হচ্ছে $f(x_i)$ ও $f(x_j)$-এর প্রথম ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য ;

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{(x_i - x_k)}$$

$$= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} + \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)} + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}$$

হচ্ছে $f(x_i), f(x_j)$ ও $f(x_k)$-এর দ্বিতীয় ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য। এইভাবে তৃতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি বিভিন্ন ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য নির্দেশ করা যায়। সাধারণভাবে,

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1) \cdots (x_2 - x_n)}$$

$$+ \cdots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$

হচ্ছে $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$-এর n-ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য। সংজ্ঞা থেকে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে, বিভক্ত পার্থক্য একটি প্রতিসম (symmetrical) অপেক্ষক। $\varphi(x)$ যদি $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$-এর যে কোন অপেক্ষক হয়, তাহলে একে সুষম বা প্রতিসম অপেক্ষক (symmetric function) বলা হয়, যদি $(1, 2, \cdots n)$ এর প্রত্যেক বিন্যাস $(i_1, \cdots, i_n)$-এর জন্যে $f(\theta_1, \cdots, \theta_n) = f(\theta_{i_1}, \cdots, \theta_{i_n})$ হয়। [এখানে $(i_1, \cdots, i_n)$ হচ্ছে $(1, 2, \cdots, n)$-এর যে কোন একটি বিন্যাস (permutation) অর্থাৎ i_j হচ্ছে 1 বা 2, $\cdots$ বা n, $(j = 1, \cdots, n)$]।

এখন আমরা দেখাব যে, $\varphi(x)$ যদি x-এর একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক হয়, তাহলে $\varphi(x)$-এর n-তম বিভক্ত পার্থক্য ধ্রুবক অর্থাৎ x-নিরপেক্ষ হবে।

প্রমাণ : মনে কর $g_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \cdots, n$, এবং $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x)$

$= a_0 + a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$

তাহলে, $g_n(x)$-এর প্রথম ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য

$$g_n(a, b) = \frac{b^n - a^n}{b - a} = b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}.$$

এটি a ও b-এর একটি অবিমিশ্র (homogeneous) $(n-1)$-ক্রমিক অপেক্ষক যার অর্থ হচ্ছে এই যে, এই অপেক্ষক কতগুলি পদের সমষ্টি যার প্রত্যেক পদ হচ্ছে দুটি রাশির গুণফল এবং রাশিদুটির শক্তিসূচক সমষ্টি (sum of the powers) হচ্ছে $(n-1)$-এর সমান।

তেমনি, $g_n(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য

$$g_n(a, b, c)=\frac{1}{c-a}\left\{g_n(c, b)-g_n(b, a)\right\}$$

$$=\frac{1}{c-a}\Big[(c^{n-1}+c^{n-2}b+\cdots+cb^{n-2}+b^{n-1})$$

$$-(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+ba^{n-2}+a^{n-1})\Big]$$

$$=\frac{1}{c-a}\Big[(c^{n-1}-a^{n-1})+(c^{n-2}-a^{n-2})b+\cdots$$

$$+b^{n-3}(c^2-a^2)+b^{n-2}(c-a)\Big]$$

$$=\{(c^{n-2}+ac^{n-3}+\cdots+ca^{n-3}+a^{n-2})$$

$$+b(c^{n-3}+ac^{n-4}+\cdots+ca^{n-4}+a^{n-3})+\cdots$$

$$+b^{n-3}(c+a)+b^{n-2}\}$$

$=a$, b ও c-এর একটি অবিমিশ্র (homogeneous) অপেক্ষক যার মাত্রাক্রম (order) হচ্ছে $(n-2)$. এইভাবে, $g_n(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ হচ্ছে $(n-r)$-মাত্রাক্রম-বিশিষ্ট অবিমিশ্র অপেক্ষক। সুতরাং $g_n(a_1, \cdots, a_n)$ হবে একটি ধ্রুবক। তাই $\varphi_n(a_1, \cdots, a_n)$ও ধ্রুবক হবে।

এখন, মনে কর, x-এর যে কোন $(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন মান $x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, \cdots x_n$ ও তদনুসারী অপর একটি চল $y=f(x)$-এর মান $y_0, y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_n$ দেওয়া আছে। [মনে রাখতে হবে যে, $f(x_i)=y_i$, $i=0, 1, \cdots, n$]. তাহলে, এই $(n+1)$ সংখ্যক y মানের ভিত্তিতে সর্বাধিক n-তম মাত্রাক্রমবিশিষ্ট বিভক্ত পার্থক্য নির্ণয় করা যেতে পারে।

এখন, আমরা লিখতে পারি

$$f(x, x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{ ; ফলে, } f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x, x_0) \text{ ;}$$

$$f(x, x_0, x_1)=\frac{f(x, x_0)-f(x_0, x_1)}{(x-x_1)}.$$

সুতরাং $f(x, x_0)=f(x_0, x_1)+(x-x_1)f(x, x_0, x_1)$;

তাই $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0, x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x, x_0, x_1)$;

$$f(x, x_0, x_1, x_2)=\frac{f(x, x_0, x_1)-f(x_0, x_1, x_2)}{(x-x_2)},$$

ফলে, $f(x, x_0, x_1)=f(x_0, x_1, x_2)+(x-x_2)f(x, x_0, x_1, x_2)$.

সুতরাং $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0, x_1)$
$$+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x, x_0, x_1, x_2).$$

এইভাবে এগিয়ে গিয়ে পাওয়া যাবে

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0, x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)+\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, x_n)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f(x, x_0, x_1, \cdots x_{n-1}, x_n).$$

এখন　$f(x)$-কে আমরা $f(x)=\phi(x)+R(x)$-রূপে প্রকাশ করব।

এখানে

$$\phi(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0, x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2)+\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{(C.17)}$$

এবং　$R(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$
$$f(x, x_0, x_1, \cdots x_{n-1}, x_n).$$

তাহলে, স্পষ্টতঃই $\phi(x)$ হচ্ছে x-এর একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক এবং এর সাহায্যেই যে কোন x-এর জন্যে $\phi(x)$-কে $f(x)$-এর আসন্ন রূপ হিসেবে ব্যবহার করা হয় এবং একেই নিউটনের বিভক্ত পার্থক প্রক্ষেপণ সূত্র বলে। আর, $R(x)$-কে ধরা হয় নিউটনের বিভক্তপার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্র ব্যবহারজনিত অবশিষ্ট পদ।

উদাহরণ C.9 ও উদাহরণ C.5-এ উপস্থাপিত সমস্যাটির সমাধান বিভক্ত পার্থক্য সূত্রানুসারেও করা যায়। এজন্যে প্রয়োজনীয় বিভক্ত পার্থক্য সারণীটি দাঁড়াবে নিম্নরূপ।

বিভক্ত পার্থক্য সারণী

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u$
0	3			
		8		
2	19		2	
		18		−·5
5	73		1·5	
		30		
10	223			

[এখানে Δ, Δ^2 ও Δ^3 সংকেতচিহ্ন যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য নির্দেশ করছে]

তাহলে, $u_3 = 3 + 3 \times 8 + 3 \times 1 \times 2 + 3 \times 1 \times (-2) \times (-\cdot 5) = 36.$

C.2.6 বিভক্ত পার্থক্যের সাহায্যে ল্যাগ্রাঞ্জের সূত্র নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি :

আমরা দেখেছি যে, যদি x-এর $(n+1)$ সংখ্যক মান $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ও তাদের জন্যে যথাক্রমে $y_0, y_1, \ldots, y_n$ জানা থাকে কোন অপেক্ষক $y = f(x)$-এর $(n+1)$ সংখ্যক মান রূপে, তাহলে, $f(x)$-এর n-ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য হচ্ছে

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

এখন, প্রক্ষেপণ নীতি অনুসারে x-এর যে কোন সারণী বহিঃস্থ মানের জন্যে $f(x)$-এর মান নির্ণয় করতে হলে $f(x)$-কে একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করতে হয়। এই $\phi(x)$ আবার এমন হবে যে, $x = x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ হলে $f(x_i) = \phi(x_i)$. এখন $\phi(x)$-এর $(n+1)$-সংখ্যক মান জানা আছে এবং তাদের সাহায্যে $\phi(x)$-এর n-ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ নির্ণয় করা যায়। কিন্তু যেহেতু n-ঘাতজ অপেক্ষকের n-তম বিভক্ত পার্থক্য ধ্রুবক, তাই $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ একটি ধ্রুবক হবে এবং $\phi(x)$-এর $(n+1)$-ক্রমিক বিভক্ত পার্থক্য শূন্য হবে, কারণ যদি $\varphi(x) =$ ধ্রুবক $= k$ হয়, তবে

$$\varphi(x_0, x_1) = \frac{k - k}{x_0 - x_1} = 0 \text{ হবে, } x_0, x_1 (x_0 \neq x_1)$$

যাই হোক্ না কেন। কাজেই $\phi(x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0$

অর্থাৎ $0 = \phi(x, x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n)$

$$= \frac{\phi(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)} + \frac{\phi(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)}$$

$$+\frac{\phi(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$+\cdots+\frac{\phi(x_n)}{(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

ফলে, $$\phi(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\phi(x_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\phi(x_1)$$

$$+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\phi(x_n).$$

C.2.7. মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্রাবলী (Central difference interpolation formulæ) :

মনে কর, $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, x_3, x_{-3}, \ldots$ হচ্ছে x-এর $(2n+1)$ সংখ্যক মান এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্ক এমন যে, $x_i=x_0+ih$, $i=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots$; $h>0$.

এই সঙ্গে মনে কর অপর একটি চল y হচ্ছে x-এর এমন একটি অপেক্ষক যে $y=f(x)$ এবং $y_i=f(x_i)$, $i=0, \pm1, \pm2, \cdots$

এখন, নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্রানুসারে, যদি $f(x)$-কে একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করা হয় এবং $\phi(x)$ এমন হয় যে, $x=x_i$, $i=0, \pm1, \pm2$ হলে, $\phi(x_i)=f(x_i)=y_i$, তাহলে, নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য সূত্র অনুসারে [C. 1.11.]

$$\phi(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0, x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_{-1})$$
$$+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})f(x_0, x_1, x_{-1}, x_2)+\cdots$$

এখন, আমরা লিখতে পারি

$$f(x_0, x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{y_1-y_0}{h}=\frac{\Delta y_0}{h}.$$

$$f(x_0, x_1, x_{-1})=\frac{f(x_0, x_1)-f(x_1, x_{-1})}{x_0-x_{-1}}$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-\frac{f(x_1)-f(x_{-1})}{x_1-x_{-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}\right\}$$

$$= \frac{1}{2h^2}(2y_1 - 2y_0 - y_1 + y_{-1})$$

$$= \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2}.$$

তেমনিভাবে দেখানো যাবে যে,

$$f(x_0, x_1, x_{-1}, x_2) = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3}, f(x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2})$$

$$= \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4} \text{ ইত্যাদি।}$$

কাজেই আমরা পাব

$$\phi(x) = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_2}{h}\right)\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} + \cdots$$

এখন, যদি লেখা যায় $\frac{x - x_0}{h} = u$, তাহলে

$$\frac{x - x_1}{h} = u - 1, \frac{x - x_{-1}}{h} = (u + 1),$$

$$\frac{x - x_2}{h} = (u - 2) \text{ ইত্যাদি।}$$

তাহলে পাওয়া যায়

$$\phi(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$= y_0 + u\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{4}\Delta 4 y_{-2} + \cdots \tag{C.19}$$

একে বলে গাউসের পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র (Gauss's forward interpolation formula).

আবার, মনে কর, x-এর $(2n+1)$ সংখ্যক মান জানা আছে

এবং সেগুলি হল $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, x_{-3}, x_3, \ldots x_{-n}, x_n, \ldots$

$$x_i = x_0 + ih, \; h > 0, \quad i = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm h, \ldots,$$

আবার, ধর অপর একটি চল $y = f(x)$-এর মান ঐ কটি x-এর জন্যে জানা আছে অর্থাৎ দেওয়া আছে $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

এখন নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্রানুসারে, যদি $f(x)$-কে একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করি এবং সেটি এমন হয় যে,

$x = x_i \; (i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ হলে,

$\phi(x_i) = f(x_i)$ হয়, তাহলে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_{-1}) \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_{-1}) f(x_0, x_{-1}, x_1) \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_1) f(x_0, x_{-1}\, x_1, x_{-2}) + \cdots \\
&= y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right) \Delta y_{-1} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\left(y_1 - y_{-1} - 2y_0 + 2y_{-1}\right) \\
&= y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_{-1} + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right) \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} \\
&\quad + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right) \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3\,!} + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

এখন লেখা যাক $u = \dfrac{x - x_0}{h}, \; \dfrac{x - x_{-1}}{h} = u + 1,$

$\dfrac{x - x_1}{h} = u - 1$ ইত্যাদি। তাহলে পাওয়া যায়

$$\phi(x) = y_0 + u \Delta y_{-1} + \binom{u+1}{2} \Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3} \Delta^3 y_{-2} + \cdots \tag{C.20}$$

একে বলে গাউসের পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণসূত্র (Gauss's backward interpolation formula).

এখন যদি x-এর $(2n+1)$ সংখ্যক মান দেওয়া থাকে $x_1, x_0, x_2, x_{-1}, x_3, x_{-2}, x_4, \ldots x_{-n+1}, x_{n+1}, (x_i = x_0 + ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ এবং $y = f(x)$-এর মান দেওয়া থাকে $y_i = f(x_i)$ অর্থাৎ $y_1, y_0, y_2, y_{-1}, y_3, \ldots y_{-n+1}, y_{n+1}$, তাহলে নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্রানুসারে $\phi(x)$ যদি এমন একটি বহুঘাতজ অপেক্ষক থাকে যে, $\phi(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (n-1))$ হয় $x = x_i$ $(= 0, \pm 1, \ldots \pm (n-1))$ এর জন্যে, তাহলে, $\phi(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1, x_0) + (x - x_1)(x - x_0)\, f(x_1, x_0, x_2) + (x - x_1)(x - x_0)(x - x_2) f(x_1, x_0, x_2\, x_{-1}) + \cdots$

$$= y_1 + \left(x - x_1\right)\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$$

$$+ (x - x_1)(x - x_0)\frac{1}{(x - x_2)}\left\{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}\right\} + \cdots$$

$$= y_1 + \left(\frac{x - x_1}{h}\right)\Delta y_0 + \left(\frac{x - x_1}{h}\right)\Delta y_0$$

$$+ \left(\frac{x - x_1}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

এখন, $\dfrac{x - x_0}{h} = u$ লিখে পাওয়া যাবে

$$\phi(x) = y_1 + (u-1)\,\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{u}{3}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-1} + \cdots \qquad \text{(C. 21)}$$

একে বলে গাউসের পশ্চাৎগামী দ্বিতীয় প্রক্ষেপণ সূত্র (the second backward interpolation formula due to Gauss).

ষ্টার্লিং-এর মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্র (Stirling's central difference interpolation formula) :

এখন মনে কর, x-এর $(2n+1)$ সংখ্যক মান $x_0, x_0 + ih = x_i$ $(i = \pm 1, \pm$

2,..., $\pm n$; $h>0$) এবং তদনুযায়ী $y=f(x)$-এর মান $f(x_0), f(x_i) = f(x_0+ih)$, $i=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ জানা আছে। তাহলে, $x_0-h<x<x_0+h$, এই অন্তরের মধ্যগত কোন x-এর মানের জন্যে $f(x)$-এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী নির্ধারণ করতে হলে ষ্টার্লিং-এর সূত্র খুব উপযোগী। পূর্বে আলোচিত গাউসের পুরোগামী ও পশ্চাৎগামী সূত্র দুটির গড় নির্ণয় ক'রে ষ্টার্লিং-এর মাধ্যমিক পার্থক্য-প্রক্ষেপণ সূত্রটি পাওয়া যায়। এই সূত্রটি তাহলে দাঁড়ায়

$$\psi(x)=y_0+u\,\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}+\frac{u^2}{2}\,\Delta^2 y_{-1}+\frac{u(u^2-1)}{3\,!}\,\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}$$
$$+\frac{u^2(u^2-1)}{4\,!}\,\Delta^4 y_{-2}+\cdots \qquad (C.\ 22)$$

এটিই হ'ল ষ্টার্লিং-এর মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্র।

বেসেলের মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্র (Bessel's central difference interpolation formula) :

মনে কর, x-এর $(2n+2)$ সংখ্যক মান x_0, $x_i=x_0+ih\ (i=\pm 1, \ldots, \pm n)$ এবং $x_{n+1}=x_0+(n+1)h$ ও তদনুযায়ী $y=f(x)$-এর মান $x=x_i\ (i=0, \pm 1, \ldots, \pm h$ ও $n+1)$-এর মধ্যে দেওয়া আছে। তাহলে, $x_0-h<x<x_0+h$ অন্তরের মধ্যবর্তী x-এর মানের জন্যে $f(x)$-এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী নির্ণয় করতে এই সূত্রটি খুব উপযোগী। উপরে আলোচিত গাউসের পুরোগামী ও পশ্চাৎগামী দ্বিতীয় সূত্র দুটির [(C. 20) ও (C. 21)] গড় নিলে এই সূত্রটি পাওয়া যায়। এটির আকার দাঁড়ায় নিম্নরূপ :

$$\xi(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+(u-\tfrac{1}{2})\,\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2\,!}\,\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}$$
$$+\frac{u(u-1)(u-\frac{1}{2})}{3\,!}\,\Delta^3 y_{-1}+\cdots \qquad (C.\ 23)$$

একে বলে বেসেলের প্রক্ষেপণ সূত্র (Bessel's interpolation formula).

এখন যদি লেখা যায় $v=u-\frac{1}{2}$, তাহলে পাওয়া যায়

$$\xi(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+v\,\Delta y_0+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$+\frac{v(v^2-\frac{1}{4})}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{(v^2-\frac{1}{4})(v^2-\frac{9}{4})}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_{-2}}{2}$$

$$+\frac{v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-\frac{9}{4})}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\cdots \quad (C.\ 24)$$

এটি হচ্ছে বেসেলের সূত্রের একটি বিকল্পরূপ (An alternative form of Bessel's formula).

এখন যদি $v=0$ হয় বা $u=\frac{1}{2}$ বা $\frac{x-x_0}{h}=\frac{1}{2}$ বা $x=x_0+\frac{h}{2}$ অর্থাৎ যদি কোন অন্তরের ঠিক মধ্যবিন্দুতে প্রক্ষেপণ করতে হয়, তাহলে বেসেলের এই সূত্রটি খুবই উপযোগী হবে। এক্ষেত্রে সূত্রটি দাঁড়ায়

$$\xi(x)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\,\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}+\frac{3}{128}\,\frac{\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_{-2}}{2} \quad (C.\ 25)$$

অন্তরের মধ্যবিন্দুতে প্রক্ষেপণের পক্ষে এই সূত্রটির ব্যবহার প্রকৃষ্ট বলে স্বীকৃত। একে বেসেলের দ্বিখণ্ডন সূত্রও বলা হয়।

উদা. C.10 নীচের সারণীতে প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে প্রক্ষেপণ পদ্ধতি অনুসারে 52 বৎসর বয়স্ক ব্যক্তিবর্গের শতকরা মৃত্যুহার নির্ণয় কর :

সারণী C.5

বয়স (বৎসর) (গত জন্মদিনে)	শতকরা মৃত্যু হার
x	$f(x)$
30	9
40	13
50	23
60	37
70	58

এখানে রাশিসংখ্যা অ-যুগ্ম এবং x-এর সারণীস্থিত মানগুলির মাঝামাঝি মানের জন্যে $f(x)$-এর মান নির্ণয় করতে হবে। তাই ষ্টার্লিং-এর সূত্র প্রয়োগই এখানে যুক্তিযুক্ত। এজন্যে নিম্নবর্ণিত পার্থক্য-সারণীটি গঠন করা যাক্।

সারণী C.6
পার্থক্য-সারণী

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
30	9				
		4			
40	13		6		
		10		−2	
50	23		4		5
		14		3	
60	37		7		
		21			
70	58				

এক্ষেত্রে $u = \frac{52-50}{10} = \cdot 2$. ষ্টার্লিং-এর সূত্র (C. 22) প্রয়োগে নির্ণেয় মান হবে

$$\psi(52) = f(50) + \cdot 2\,\frac{\Delta f(50) + \Delta f(40)}{2} + \frac{(\cdot 2)^2}{2}\,\Delta^2 f(40)$$
$$+ \frac{(\cdot 2)(\cdot 04 - 1)}{6} \times \frac{\Delta^3 f(40) + \Delta^3 f(30)}{2}$$
$$+ \frac{(\cdot 2)^2(\cdot 04 - 1)}{24}\,\Delta^4 f(30) = 25\cdot 456 \simeq 25.$$

উদা. C.11 নীচে কয়েকটি বিন্দুতে একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব রেখার কতিপয় ভুজকোটির $(x, \phi(x))$ মান দেওয়া আছে। ভুজাঙ্ক (abscissa) 1·5-এর জন্যে কোটির (ordinate) মান যথোপযোগী প্রক্ষেপণ সূত্র সাহায্যে নির্ণয় কর :

সারণী C.7

x	$y = \phi(x)$
0·00	·3989
1·00	·2420
2·00	·0540
3·00	·0044

এক্ষেত্রে বেসেলের দ্বিখণ্ডন সূত্রই (C. 25) সবিশেষ প্রযোজ্য। তাহলে প্রয়োজনীয় পার্থক্য সারণীটি গঠন করতে হয় [সারণী C. 8 দ্রষ্টব্য].

এক্ষেত্রে $x_0=1, u=\frac{1\cdot5-1}{1}=\frac{1}{2}$ ও $v=u-\frac{1}{2}=0.$

সারণী C.8
পার্থক্য-সারণী

x	$\phi(x)$	$\Delta\phi(x)$	$\Delta^2\phi(x)$	$\Delta^3\phi(x)$
0·00	·3989			
		− ·1569		
1·00	·2420		− ·0311	
		− ·1880		·1695
2·00	·0540		·1384	
		− ·0496		
3·00	·0044			

তাহলে নির্ণেয় মানটি দাঁড়াবে

$$\xi(1\cdot5)=\frac{\phi(1\cdot00)+\phi(2\cdot00)}{2}-\frac{1}{8}\;\frac{\Delta^2\phi(1\cdot00)+\Delta^2\phi(0\cdot00)}{2}$$

$$=(\cdot2420+\cdot0540)\tfrac{1}{2}+(-\tfrac{1}{8})\times\tfrac{1}{2}(\cdot0073)=\cdot1475.$$

স্টার্লিং ও বেসেলের সূত্রকে মাধ্যমিক পার্থক্য প্রক্ষেপণ সূত্র বলে বর্ণনা করার কারণ হচ্ছে এই যে, স্পষ্টতঃই x ও y-এর কতগুলি প্রদত্ত মান থেকে সারণীস্থিত x মানগুলির মাঝামাঝি কোন বিন্দুর জন্যে প্রক্ষেপণ সাহায্যে y-এর মান নির্ণয়ে এগুলি খুব সুবিধেজনক। সুবিধে বলতে হিসেব করা বা কষবার সুবিধের কথাই বোঝানো হচ্ছে। কারণ, সারণীস্থিত x মানগুলির অন্তর্বর্তী এমন কি বহির্ভূত যে-কোন মানের জন্যেই প্রক্ষেপণ নীতি প্রয়োগ করতে যে-কোন সূত্রই ব্যবহার করা যায়। কিন্তু বিভিন্ন সূত্রে বিভিন্ন ক্রমিক পার্থক্যযুক্ত পদ থাকে এবং তাদের সহগ হচ্ছে $u=\frac{x-x_0}{h}$-এর বিভিন্ন অপেক্ষক যেমন, $u, u-\frac{1}{2}, \frac{u^2}{2}, \frac{u^2-\frac{1}{4}}{6}$ ইত্যাদি। কাজেই বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগের হেতু হচ্ছে এই যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে সার্থকতম সূত্র হবে সেইটি যার অবশিষ্ট পদের মান ক্ষুদ্রতম এবং ঐ অবশিষ্ট পদের মান ন্যূনতম রাখার একটি নিরিখ হচ্ছে উল্লিখিত

সহগগুলির মান দ্রুতহারে কমতে থাকা। এই মানগুলি হ্রাস পাওয়ার ফলে বেশী উচ্চক্রমিক পার্থক্যযুক্ত পদগুলির সহগ শূন্যের কাছাকাছি হয়ে আসে ও ফলে সেই পদগুলিকে সূত্রে আর রাখবার দরকার হয় না এবং অঙ্ক কষবার জন্যে ঐ পদগুলির মান নির্ণয়ও প্রয়োজন হয় না। অবশ্য উল্লেখ্য যে, বিভিন্ন সূত্রে সারণীর বিভিন্ন অঞ্চলভুক্ত y-মানকে বিভিন্ন গুরুত্ব আরোপ করা হয় এবং ঐ ভাবেই অবশিষ্ট পদের মানকে নিয়ন্ত্রিত রাখার চেষ্টা করা হয়। যেমন, যদি সারণীটির গোড়ার দিকের x-এর জন্যে প্রক্ষিপ্ত মান বের করতে হয়, তাহলে নিউটনের পুরোগামী সূত্র এবং শেষের দিকের x-এর জন্যে নিউটনের পশ্চাৎগামী সূত্র বিশেষ উপযোগী বলে গণ্য হয়। এই একই কারণে সারণীর মাঝামাঝি x-এর জন্যে স্টার্লিং ও বেসেলের সূত্রের প্রয়োগ সার্থক হওয়া স্বাভাবিক। আবার, যদি x ও y-এর অ-যুগ্ম সংখ্যক [যথা $(2n+1)$] মান জানা থাকে, তাহলে স্টার্লিং-এর ও যুগ্ম-সংখ্যক [যথা $(2n+2)$] মান জানা থাকলে বেসেলের সূত্র ব্যবহার অধিকতর উপযোগী। অধিকন্তু যদি x-এর তেমন মাঝামাঝি মানের জন্যে প্রক্ষিপ্ত মান নির্ণয় করতে হয়, যার জন্যে u-এর মান $(-1, 1)$ অন্তরের গোড়ার দিকে বা শেষের দিকে হয় [উদাহরণতঃ যদি $-{\cdot}25 < u < {\cdot}25$ হয়] তাহলে স্টার্লিং-এর সূত্র এবং যদি u-এর মান $(-1, 1)$-এর মাঝামাঝি হয় [উদাহরণতঃ, যদি ${\cdot}25 < u < {\cdot}75$ হয় অর্থাৎ যদি $-{\cdot}25 < v < {\cdot}25$ হয়] তাহলে বেসেলের সূত্র ব্যবহার করলে অধিকতর সুফল পাওয়া যাবে। এইসব সূত্রগুলি ব্যবহার অবশ্য সম্ভব হবে কেবল তখনই যখন x-এর প্রদত্ত মানগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়। অন্যথায় লাগ্রাঞ্জ বা নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য সূত্র ব্যবহার ছাড়া গতি নেই।

C.2.8 অন্তরের বহুখণ্ডন বা উপসারণী গঠন (Sub-division of intervals or subtabulation) :

মনে কর, x-এর $x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0+3h,$ ইত্যাদি সমান্তরবিশিষ্ট মানের জন্যে কোন একটি অপেক্ষক u_x-এর মান $u_{x0}, u_{x0+h}, u_{x0+2h}, u_{x0+3h}$ ইত্যাদি দেওয়া আছে। এখানে সাধারণ অন্তরটি হ'ল h. এখন, একটি পদ্ধতি অনুসরণ করলে x-এর x_0+k, x_0+2k, x_0+3k ইত্যাদি $(k<h)$ সমান্তর-বিশিষ্ট মানের জন্যে u_x-এর মান $u_{x0+k}, u_{x0+2k}, u_{x0+3k},$ ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়। এখানে k এমন একটি অখণ্ডসংখ্যা যে h হচ্ছে k-এর একটি অখণ্ড

গুণনীয়ক অর্থাৎ $h=kt$, (t একটি অখণ্ড ধনাত্মক রাশি)। সাধারণতঃ t হবে 2, 5 বা 10. এই ব্যাপারটিকে বলে উপসারণী গঠন বা অন্তরের বহুখণ্ডন (subtabulation or subdivision of intervals).

এখন, মনে কর, Δ ও E হচ্ছে এমন প্রয়োজক যে সংজ্ঞানুযায়ী $\Delta u_x = u_{x+h} - u_x$, $\Delta^2 u_x = u_{x+2h} - 2u_{x+h} + u_x$ ইত্যাদি ও $Eu_x = u_{x+h}$, $E^2 u_x = E(Eu_x) = u_{x+2h}$ ইত্যাদি, যার ফলে, $E = \Delta + 1$ বা $\Delta = E - 1$.

আবার মনে কর δ ও ε হচ্ছে এমন প্রয়োজক যে,

সংজ্ঞানুযায়ী $\delta u_x = u_{x+k} - u_x$, $\delta^2 u_x = \delta(\delta u_x) = \delta(u_{x+k} - u_x)$

$$= \delta u_{x+k} - \delta u_x = (u_{x+2k} - u_{x+k}) - (u_{x+k} - u_x)$$

$$= u_{x+2k} - 2u_{x+k} + u_x, \text{ ইত্যাদি,}$$

এবং $\varepsilon u_x = u_{x+k}$, $\varepsilon^2 u_x = \varepsilon(\varepsilon u_x) = \varepsilon(u_{x+k}) = u_{x+2k}$, ইত্যাদি।

তাহলে, $\delta = \varepsilon - 1$ এবং $\varepsilon = \delta + 1$, ইত্যাদি।

এখন, δ ও ε-এর সঙ্গে Δ ও E-এর সম্পর্ক সহজেই নির্ণয় করা যায়।

স্পষ্টতঃই, $\varepsilon^t u_x = u_{x+tk} = u_{x+h} = Eu_x$.

তাই $\varepsilon^t = E$. অবশ্যই এটি কোন বীজগাণিতিক সমীকরণ নয়। বাস্তবিক, এই সমতা নির্দেশনের অর্থ হচ্ছে এই যে প্রয়োজক হিসেবে এদের ভূমিকা সমতুল (equivalent). অর্থাৎ কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর ওপর E প্রয়োজক যে পরিবর্তন আনবে ε^t প্রয়োজকও সেই একই পরিবর্তন আনবে। অর্থাৎ $Ef(x) = f(x+h)$ হবে এবং $\varepsilon^t f(x) = f(x+tk) = f(x+h) = Ef(x)$ হবে। তাহলে, আমরা লিখতে পারব $\varepsilon = E^{\frac{1}{t}} = (1+\Delta)^{\frac{1}{t}}$.

$$\text{সুতরাং}\quad 1+\delta = \varepsilon = (1+\Delta)^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t}\Delta + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 + \cdots$$

$$\text{এবং সেইজন্যেই}\quad \delta = \frac{\Delta}{t} + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 + \cdots$$

$$\text{এখন,}\quad \delta^2 = \left[\frac{1}{t}\Delta + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{\Delta^2}{2!} + \cdots\right]^2$$

$$= \frac{1}{t^2}\Delta^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)\Delta^3 + \left[\left\{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\right\}^2\frac{1}{4} + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-2\right)\frac{1}{3}\right]\Delta^4 + \cdots,$$

$$\delta^3 = \left[\frac{1}{t}\Delta + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{1}{2}\Delta^2 + \cdots\right]^3$$

$$= \frac{1}{t^3}\Delta^3 + \frac{3}{t^3}\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{1}{2}\Delta^4 + \cdots, \text{ ইত্যাদি।}$$

তাহলে, $\delta u_x, \delta^2 u_x, \delta^3 u_x$, ইত্যাদির মান $\Delta u_x, \Delta^2 u_x, \Delta^3 u_x$ ইত্যাদির মাধ্যমে সহজেই নির্ণীত হবে।

$$\text{এখন,}\quad u_x + \delta u_x = u_{x+k},$$

$$\delta u_x + \delta^2 u_x = (\delta+\delta^2)u_x = \delta(1+\delta)u_x = \delta E u_x = \delta u_{x+k},$$

$$(u_x + \delta u_x) + (\delta u_x + \delta^2 u_x) = u_{x+k} + \delta u_{x+k}$$

$$= (1+\delta)u_{x+k} = E u_{x+k} = u_{x+2k},$$

$$\delta^2 u_x + \delta^3 u_x = \delta^2(1+\delta)u_x = \delta^2 E u_+ = \delta^2 u_{x+k},$$

$$\delta u_{x+k} + \delta^2 u_{x+k} = \delta(1+\delta)u_{x+k} = \delta E u_{x+k} = \delta u_{x+2k}$$

$$u_{x+2k} + \delta u_{x+2k} = (1+\delta)u_{x+2k} = u_{x+3k} \text{ ইত্যাদি।}$$

এইভাবে u_{x+3k} এবং তেমনি $u_{x+4k}, u_{x+5k}, \ldots u_{x+(t-1)k}$ ইত্যাদি সব মানই নির্ণয় করা যায়। যদি প্রদত্ত মানের সাহায্যে $\Delta^n u_x$ পর্যন্ত মান নির্ণয় করা যায়, তাহলে এই পদ্ধতি অনুসরণ ক'রে u_{x+nk} পর্যন্ত মান নির্ণয় করা যাবে। তার চেয়ে বেশী মান বের করতে হলে স্বীকার করে নিতে হয় যে, $\delta^n u_x =$ ধ্রুবক। ফলে, ধরে নিতে হয় যে,

$$\delta^n u_x = \delta^n u_{x+k} = \delta^n u_{x+2k} = \cdots = c \text{ (ধ্রুবক)।}$$

তাহলে, ওপরের পদ্ধতি অনুসরণ ক'রে u_{x+tk}-এর সব মানই নির্ণয় করা যায় ($t = 1, 2, \ldots n, \ldots$).

উদাহরণতঃ, যখন, $h=5$, $k=1$ এবং $t=5$, তখন ওপরের সূত্রগুলি থেকে পাওয়া যাবে

$$\delta u_x = (\cdot 2\Delta - \cdot 08\Delta^2 + \cdot 048\Delta^3 - \cdots)u_x$$

$$\delta^2 u_x = (\cdot 04\Delta^2 - \cdot 032\Delta^3 + \cdots)u_x$$

$$\delta^3 u_x = \cdot 008\Delta^3 u + \cdots$$

ইত্যাদি।

উদা. C.12 1950 সনে ভারতে বিভিন্ন বয়সের (x-র) জন্যে জীবনসারণীর l_x মানগুলি নীচের সারণীতে দেওয়া আছে। l_{18}, l_{19}, l_{20} ও l_{21}-এর মান উপযুক্ত প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগ ক'রে নির্ণয় কর।

সারণী C.9

বয়স (বৎসর)	
x	l_x
17	9280
22	8672
27	8186
32	7615
37	7001

এখন স্পষ্টতঃই উপসারণী গঠনের সমস্যাটি সমাধান করতে হবে যার জন্যে t-এর মান 5. কাজেই প্রথমে পার্থক্য-সারণী গঠন করা হচ্ছে।

সারণী C.10

x	l_x	Δl_x	$\Delta^2 l_x$	$\Delta^3 l_x$	$\Delta^4 l_x$
17	9280				
		−608			
22	8672		122		
		−486		−207	
27	8186		−85		249
		−571		42	
32	7615		−42		
		−614			
37	7001				

তাহলে, ওপরের সূত্র প্রয়োগ ক'রে এবং $\Delta^5 l_x = 0$ ধ'রে পাই

$\delta u_{17} = -149{\cdot}662,\ \delta^2 u_{17} = 17{\cdot}878,\ \delta^3 u_n = -2{\cdot}453,$

$\delta^4 u_{17} = {\cdot}398.$ কাজেই l_{18}, l_{19} ইত্যাদি নির্ণয়ে নিম্নলিখিত সারণীটি গঠন করা দরকার এবং l_x-এর নির্ণেয় মানগুলি নিম্নলিখিত সারণীটির দ্বিতীয় স্তম্ভে দেখানো হয়েছে।

x	l_x	δl_x	$\delta^2 l_x$	$\delta^3 l_x$	$\delta^4 l_x$
17	9280·000				
		−149·662			
18	9130·338		17·878		
		−131·784		−2·453	
19	8998·554		15·425		·398
		−116·359		−2·055	
20	8882·195		13·370		
		−102·989			
21	8779·206				

C.2.9 বিবর্ত প্রক্ষেপণ (Inverse interpolation):

লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণ সূত্রের উপযোগিতা আলোচনা প্রসঙ্গে আমরা বিবর্ত প্রক্ষেপণের বিষয়বস্তুর অবতারণা করেছিলাম [C.2.4 দ্রষ্টব্য]। এখন আরও একটু বিশদভাবে এ ব্যাপারে আলোচনা হবে, যদিও বিষয়টির খুব গভীরে প্রবেশ করার সুযোগ আমাদের নেই।

দুটি চল x ও y-এর কতিপয় পারস্পরিক মান দেওয়া থাকলে যদি প্রদত্ত তথ্যাবলীর প্রকৃতি পর্যবেক্ষণে y-কে x-এর ওপর নির্ভরশীল বলে মনে হয় তবে y-কে x এর কোন অপেক্ষক, যেমন মনে কর, $y = f(x)$ ধরে নিয়ে প্রদত্ত সারণী বহির্ভূত x-এর জন্যে y-এর মান নির্ণয়ের সমস্যা হচ্ছে পূর্বালোচিত প্রত্যক্ষ (direct) প্রক্ষেপণের সমস্যা। কিন্তু এক্ষেত্রে (অর্থাৎ যখন y হচ্ছে x-এর ওপর নির্ভরশীল) যদি সারণী বহির্ভূত y-এর জন্যে x-এর মান নির্ণয় করা প্রয়োজন হয় তবে আমরা বিবর্ত (inverse) প্রক্ষেপণের সমস্যার সম্মুখীন হই। অবশ্য যদি অন্ততঃপক্ষে প্রদত্ত প্রসারসীমার মধ্যে x ও y-এর একৈক পারম্পর্য (one-to-one orrespondence) আছে বলে স্বীকার করা যায় ও ফলে x-কেও y-এর অপেক্ষক রূপে গণ্য করা যায় (অর্থাৎ $y = f(x)$-এর বিবর্ত অপেক্ষক $x = g(y)$-এর অস্তিত্ব

স্বীকার করা যায়) তবে সারণী বহির্ভূত y-এর জন্যে তদনুগ x-এর মানও পূর্বালোচিত (প্রত্যক্ষ) প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগে নির্ণয় করা যায় এবং এই প্রক্ষেপণকেও বিবর্ত প্রক্ষেপণ বলা হয়। এক্ষেত্রে বলা বাহুল্য লাগ্রাঞ্জ বা নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য সূত্রই প্রযোজ্য, কারণ সাধারণতঃ x-এর মানগুলিই সুবিন্যস্ত (যেমন, মনে কর, সমান্তর শ্রেণীভুক্ত) থাকে এবং y-এর মানগুলি সেরূপ থাকে না। কিন্তু যখন উল্লিখিত স্বীকরণ স্বাভাবিক নয় তখনও বিবর্ত প্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। এখন আমরা সে প্রসঙ্গে আসছি। তাছাড়া, লাগ্রাঞ্জের সূত্র ও নিউটনের বিভক্ত পার্থক্য সূত্র উভয়েরই প্রয়োগে অনেকসময় অতিরিক্ত জটিল হিসেব-নিকেশ দরকার হয় এবং তাতে ভুল হবার যথেষ্ট সম্ভাবনা থাকে। এজন্যে এদের ব্যবহারও সর্বদা সমর্থনযোগ্য নয়। তাই বিবর্ত প্রক্ষেপণের সমস্যা সমাধানের বিকল্প পথের অনুসন্ধান করা দরকার।

যদি x-এর মান $x_0, x_1, x_2, \cdots$ ইত্যাদি $(x_i = x_0 + ih,\ h > 0,\ i = 1, 2, \cdots)$ দেওয়া থাকে ও y-এর মান দেওয়া থাকে যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \cdots$ ইত্যাদি তাহলে y-কে x-এর অপেক্ষক $y_x = g(x)$ ধরে লিখতে পারি $y_x = E^x y_0 = (1+\Delta)^x\ y_0 = y_0 + x\Delta\ y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots$ এখন, যদি প্রদত্ত রাশিগুলির প্রকৃতি থেকে বা অন্য যে কোন কারণে $\Delta^2 y_x$-কে অন্ততঃ আসন্নভাবে ধ্রুবক বলে গণ্য করা হয়, তাহলে পাওয়া যাবে

$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + \dfrac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_0$. এখন কোন y-এর জন্যে x নির্ণয় করতে হলে এই দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করে তার মূলটিকেই নির্ণেয় x বলে ধরা যেতে পারে। এতে অবশ্যই দুটি সমাধান বেরোবে। আবার, যদি $\Delta^2 y_x$-এর পরিবর্তে অধিকতর কোন ক্রমিক পার্থক্যকে ধ্রুবক ধরে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়, তাহলে আরও বেশী সংখ্যক সমাধান বেরোবে। পক্ষান্তরে, যদি লাগ্রাঞ্জের পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়, তবে অনেকসময় দেখা যাবে যে একই y-এর জন্যে x-এর নির্ণীত মান এই দুই পদ্ধতির জন্যে সমান বা কাছাকাছি হবে না। কাজেই কোন্ মানটিকে সবচেয়ে গ্রহণযোগ্য নির্ণেয় মান বলে স্বীকার করতে হবে সেটা স্থির করাও আবার আর এক সমস্যা। এজন্যে বিবর্ত প্রক্ষেপণে আরও দুটি পদ্ধতি প্রয়োগ করা যেতে পারে। যথা—

(1) উত্তরোত্তর আসন্নমান নির্ণয়ণ পদ্ধতি (Method of successive approximations) :

প্রথমে প্রদত্ত x-গুলি দেখে তাদের মূল (ধর A) ও মাপনামাত্রা (ধর, B)-কে সুবিধামতো পরিবর্তন ক'রে নিতে হবে যাতে পরিবর্তিত x-এর মান ছোট হয় এবং (0, 1)-এর মধ্যে থাকে। তারপর,

$$y_x = (1+\Delta)^x y_0 = y_0 + x\,\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_0$$
$$+ \tfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)\,\Delta^3 y_0 + \cdots$$

—এই সূত্র থেকে x^2, x^3 ইত্যাদির মান নগণ্য ধ'রে x-এর প্রথম আসন্নমান a_1 নির্ণয় করা হয়। এভাবে পাওয়া যায় $a_1 = \frac{y_x - y_0}{\Delta y_0}$. তারপর x^3, x^4 ইত্যাদি নগণ্য ধ'রে লেখা হয়

$y_x = y_0 + a_2\,\Delta y_0 + \frac{1}{2}a_2\,(a_1 - 1)\,\Delta^2 y_0$ এবং তার থেকে x-এর দ্বিতীয় আসন্নমান a_2 নির্ণয় করা হয় এবং পাওয়া যায়

$a_2 = \dfrac{y_x - y_0}{\Delta y_0 + \frac{1}{2}(a_1 - 1)\,\Delta^2 y_0}$. পরবর্তী পর্যায়ে x^4, x^5 ইত্যাদিকে নগণ্য ধ'রে x-এর তৃতীয় আসন্ন মান a_3 নির্ণয় করা হয় এবং পাওয়া যায়

$$a_3 = \frac{(y_x - y_0)}{\Delta y_0 + \frac{1}{2}(a_2 - 1)\,\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(a_2 - 1)(a_2 - 2)\,\Delta^3 y_0}$$

এবং এইভাবে অগ্রসর হতে হয় যতক্ষণ না পরপর দুটি a-এর মান প্রায় (আবশ্যকমতো) সমান হয়। মনে কর a_t ও a_{t+1} হচ্ছে সমান বা প্রায় সমান। তাহলে নির্ণেয় x-এর মান হবে

$$x = a^t B + A.$$

উল্লেখ্য যে, y_x হচ্ছে y-এর সেই মান যার জন্যে x-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

(2) তৃতীয় ক্রমিক পার্থক্য দূরীকরণ :

প্রথমে মূল (origin) ও মাপনামাত্রা (scale) পরিবর্তন করে x-এর মান ছোট করে নেওয়া হবে এবং পর্যবেক্ষণ সাহায্যে x-এর একটি আসন্নমান a নির্ণয় করা হবে যাতে y_a-এর মান y_x-এর যথাসম্ভব সমীপবর্তী হয়। তারপর লেখা হবে

$$y_x=(1+\Delta)^x y_0=y_0+x\,\Delta y_0+\frac{x(x-1)}{2}\,\Delta^2 y_0$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\,\Delta^3 y_0+\cdots \qquad \text{(I)}$$

এবং $y_x=(1+\Delta)^{x-1}\,y_1=y_1+(x-1)\,\Delta y_1+\dfrac{(x-1)(x-2)}{2}\,\Delta^2 y_1$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}\,\Delta^3 y_1+\cdots \qquad \text{(II)}$$

$[x=x_0, x_1, x_2, \cdots;\ x_i=x_0+ih,\ h>0,\ y_{xi}=y_i : i=1, 2, \cdots]$

এখন (I)-এর উভয় পার্শ্বকে $(3-a)$ ও (II)-এর উভয়পার্শ্বকে a দিয়ে গুণ করে এবং গুণফল যোগ করলে পাওয়া যাবে

$$(3-a)\,y_x+ay_x=\{(3-a)\,y_0+ay_1\}+\{(3-a)x\,\Delta y_0+a(x-1)\,\Delta y_1\}$$
$$+\{(3-a)\,\tfrac{1}{2}x(x-1)\,\Delta^2 y_0+a\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)\,\Delta^2 y_1\}$$
$$+\{(3-a)\,\tfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)\,\Delta^3 y_2$$
$$+a\tfrac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\,\Delta^3 y_1\}+\cdots \qquad \text{(III)}$$

এখন, y_x-এর চতুর্থ ও তদূর্ধ ক্রমিক পার্থক্যযুক্ত পদগুলি অগ্রাহ্য করলে ও তৃতীয় ক্রমিক পার্থক্য ধ্রুবক $=k$ ধরলে পাওয়া যাবে

$$(3-a)\,\tfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)\,\Delta^3 y_0+\tfrac{1}{6}a(x-1)(x-2)(x-3)\,\Delta^3 y_1$$
$$=\tfrac{1}{6}(x-1)(x-2)(3x-ax+ax-3a)k\simeq 0 \text{ কারণ } x\simeq a.$$

কাজেই সমীকরণ (III) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের রূপ নেবে। এখন এর সমাধান নির্ণয় করে x-এর যে মূলটি (মনে কর $\bar{x}$) a-এর নিকটবর্তী তাকেই গ্রহণ করে নির্ণেয়মান বলে ধরা হবে।

বিবর্ত প্রক্ষেপণ সমস্যা সমাধানে উত্তরোত্তর আসন্নমান নির্ণয়ণ-পদ্ধতিটিই প্রয়োগের দিক থেকে সবচেয়ে উপযোগী এবং এর ব্যবহারই সাধারণভাবে অনুমোদনযোগ্য। এই পদ্ধতি প্রয়োগের নিম্নলিখিত বিকল্পরূপও প্রণিধানযোগ্য :

নিউটনের পুরোগামী সূত্র

$$y=y_0+u\,\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2}\,\Delta^2 y_0+\frac{u(u-1)(u-2)}{3}\,\Delta^3 y_0+\cdots$$

থেকে পাওয়া যায়

$$u=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{u(u-1)}{2\Delta\, y_0}-\frac{u(u-1)(u-2)}{3\,!\,\Delta y_0}\,\Delta^3 y_0-\cdots \qquad \text{(IV)}$$

(IV)-এর দক্ষিণপার্শ্বের প্রথম পদটি মাত্র বজায় রেখে ও বাকীগুলি বর্জন করে u-এর প্রথম আসন্নমান $u_{(1)}$ পাওয়া যায় $u_{(1)}=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}$. একে (IV)-এর দক্ষিণ-পার্শ্বে u-এর পরিবর্তে ব্যবহার ক'রে u-এর দ্বিতীয় আসন্নমান পাওয়া যায়

$$u_{(2)}=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{u_{(1)}(u_{(1)}-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}-\frac{u_{(1)}(u_{(1)}-1)(u_{(1)}-2)}{3\,!\,\Delta y_0}\Delta^3 x_0$$

$$-\frac{u_{(1)}(u_{(1)}-1)(u_{(1)}-2)(u_{(1)}-3)}{4\,!\,\Delta y_2}\Delta^4 y_0\cdots \qquad \text{(V)}$$

এরপর u-এর তৃতীয় আসন্নমান $u_{(3)}$ পাওয়া যায়

$$u_{(3)}=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{u_{(2)}(u_{(2)}-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}-\frac{u_{(2)}(u_{(2)}-1)(u_{(2)}-2)}{3\,!\,\Delta y_0}\Delta^3 g_0$$

$$-\frac{u_{(2)}(u_{(2)}-1)(u_{(2)}-2)(u_{(2)}-3)}{4\,!}\frac{\Delta u y_2}{\Delta y_0},$$

এইভাবে পরবর্তী আসন্ন মানগুলিও নির্ণয় করা যেতে পারে।

সবশেষে ব্যবহৃত আসন্ন মান যদি $u_{(t)}$ হয়, তবে y_x-এর অনুসারী নির্ণেয় x-এর মান এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায় $u=\frac{x-x_0}{h}$ থেকে $x_{(t)}=x_0+hu_{(t)}$ হিসেবে।

C.2.10 দ্বিচলক প্রক্ষেপণ (Bivariate Interpolation) :

মনে কর x ও y যে কোন দুটি চল ও $z=f(x, y)$ হচ্ছে x ও y-এর যে কোন একটি অপেক্ষক। এখন, যদি x ও y-এর সমান্তর শ্রেণীভুক্ত মান ও তদনুযায়ী z-এর মান দেওয়া থাকে, তবে তাদের সাহায্যে ঐ সমস্ত (x, y) মান ছাড়া অন্য যে কোন দুটি মানের জন্যে z-এর মান প্রক্ষেপণ পদ্ধতি সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এই উদ্দেশ্যে আমরা Δ ও E-এর সংজ্ঞা একটু ব্যাপকতরভাবে পরিবর্তন ক'রে নেব। যেমন, আমরা লিখব [x মানগুলি সমান্তর (h) শ্রেণীভুক্ত বলে ধরে]

$$\Delta_x f(x, y)=f(x+h, y)-f(x, y)$$

$$\Delta_x^2 f(x, y)=\Delta_x[\Delta_x f(x, y)]=\Delta_x[f(x+h, y)-f(x, y)]$$
$$=\Delta_x f(x+h, y)-\Delta_x f(x, y)$$
$$=[f(x+2h, y)-f(x+h, y)]-[f(x+h, y)-f(x, y)]$$
$$=f(x+2h, y)-2f(x+h, y)+f(x, y),$$

$$E_x f(x, y)=f(x+h, y)\,;$$

$$E_x^2 f(x, y)=E_x[E_x f(x, y)]=E_x[f(x+h, y)]=f(x+2h, y)$$

ইত্যাদি।

তাহলে, $E_x = \Delta_x + 1$ এবং $\Delta_x = E_x - 1$

[স্মরণীয় : $1\, f(x, y) = f(x, y)$].

তদ্রূপ, Δ_y ও E_y হচ্ছে এমন প্রয়োজক (operator) যে, y-এর সারিটি সমান্তর (k)-শ্রেণীভুক্ত বলে ধরলে, লেখা যাবে

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y+k) - f(x. y),$$

$$\Delta_y^2 f(x, y) = \Delta_y [\Delta_y f(x, y)] = \Delta_y [f(x, y+k) - f(x, y)]$$

$$= \Delta_y f(x, y+k) - \Delta_y f(x, y)$$

$$= [f(x, y+2k) - f(x, y+k)] - [f(x, y+k) - f(x, y)]$$

$$= f(x, y+2k) - 2f(x, y+k) + f(x, y).$$

$$E_y f(x, y) = f(x, y+k).$$

$$E_y^2 f(x, y) = E_y [E_y f(x, y)] = E_y [f(x, y+k)] = f(x, y+2k).$$

$E_y = \Delta_y + 1$, $\Delta_y = E_y - 1$ ইত্যাদি। তাছাড়া,

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \Delta_x [\Delta_y f(x, y)] = \Delta_x [f(x, y+k) - f(x, y)]$$

$$= \Delta_x f(x, y+k) - \Delta_x f(x, y)$$

$$= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y).$$

এ থেকে দেখা যেতে পারে যে, $\Delta_x \Delta_y = \Delta_y \Delta_x$.

সাধারণভাবে, $E_x^m E_y^n f(x, y) = f(x+hm, y+kn)$.

কাজেই, $f(x+hm, y+kn) = E_x^m E_y^n f(x, y)$

$$= (1+\Delta_x)^m (1+\Delta_y)^n f(x, y)$$

$$= \left[\left\{1 + m\Delta_x + \binom{m}{2}\Delta_x^2 + \binom{m}{3}\Delta_x^3 + \cdots\right\}\right.$$

$$\left.\left\{1 + n\Delta_y + \binom{n}{2}\Delta_y^2 + \binom{n}{3}\Delta_y^3 + \cdots\right\}\right] f(x, y)$$

$$= \left[1 + \left(m\Delta_x + n\Delta_y\right) + \left\{\binom{m}{2}\Delta_x^2 + \binom{n}{2}\Delta_y^2 + mn\,\Delta_x\Delta_y\right\}\right.$$

$$+ \left\{\binom{m}{3}\Delta_x^3 + \binom{n}{3}\Delta_y^3 + n\binom{m}{2}\right.$$

$$\left.\left.\Delta_x^2\Delta_y + m\binom{n}{2}\Delta_x\Delta_y^2 + \cdots\right\}\right] f(x, y)$$

$$= f(x, y) + (m\Delta_x + n\Delta_y) f(x, y)$$

$$+ \left\{\binom{m}{2}\Delta_x^2 + \binom{n}{2}\Delta_y^2\right\} f(x, y)$$

$$+mn\,\Delta_x\,\Delta_y f(x, y)+\left\{\binom{m}{3}\Delta_x^3+\binom{n}{3}\Delta_y^3+n\binom{m}{2}\Delta_x^2\,\Delta_y\right.$$

$$\left.+m\binom{n}{2}\Delta_x\,\Delta_y^2\right\}f(x, y)+\cdots$$

এই সূত্রটি অনেকটা একচল প্রক্ষেপণ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নিউটনের পুরোগামী সূত্রের অনুরূপ। সেইজন্যে একে দ্বিচল পুরোগামী প্রক্ষেপণ সূত্র বলা চলে।

প্রয়োগের ক্ষেত্রে নিম্নবর্ণিত পদ্ধতিটি অনুসরণযোগ্য। মনে কর $f(x, y)$-এর মান দেওয়া আছে $x=x_0, x_1, x_2, x_3$ ইত্যাদি ও $y=y_0, y_1, y_2, y_3$ ইত্যাদির জন্যে, এবং $x_i=x_0+ih, i=1,\ldots, h>0$, এবং $yi=y_0+ik, i=1, 2\ldots,$ ও $k>0$. এখন মনে কর যে কোন (x, y)-এর জন্যে $f(x, y)$-এর মান নির্ণয় করতে হবে। তাহলে, যে কোন উপযুক্ত এক চল প্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ ক'রে প্রথমে $f(x, y_0), f(x, y_1), f(x, y_2), f(x, y_3)$, ইত্যাদির মান সহজেই নির্ণয় করা যাবে। তারপর এই কটি একচল (x) ভিত্তিক মান ব্যবহার ক'রে আবার একটি যথোপযোগী একচল প্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ ক'রে $f(x, y)$-এর মান নির্ণয় করা যেতে পারে। উদাহরণ যোগে এ পদ্ধতিটির কার্যকারিতা দেখা যাক্।

উদা. C.13 নীচের সারণীতে বিভিন্ন x_1, x_2-এর জন্যে $f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকের মান দেওয়া আছে। উপযুক্ত প্রক্ষেপণ সূত্র ব্যবহার করে $f(8, 5)$ এর মান নির্ণয় কর :

সারণী C.11

x_2 \ x_1	5	10	15	20
4	6·26	5·96	5·86	5·80
6	4·39	4·05	3·94	3·87
8	3·69	3·35	3·22	3·15
10	3·33	3·98	2·85	2·77

এখানে x_1 ও x_2 হচ্ছে একটি জেলার মানচিত্রে সুবিধেমতো গৃহীত মূলবিন্দু থেকে যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্ব অক্ষ বরাবর কিলোমিটারে নির্ধারিত দূরত্ব

ও $f(x_1, x_2)$ হচ্ছে (x_1, x_2) ভুজকোটি সম্বলিত বিন্দুকে কেন্দ্র নিয়ে 1 কিলোমিটার ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তাকার অঞ্চলে একর প্রতি ধানের উৎপাদনের পরিমাণ (কুইণ্টালে)।

এখানে তুটি চল x_1 ও x_2-এর সম্পর্কে প্রক্ষেপণ করতে হবে, কারণ $x_1 = 8$ ও $x_2 = 5$ হচ্ছে সারণী বহির্ভূত মান। এ উদ্দেশ্যে আমরা প্রথমে সারণীভুক্ত বিভিন্ন x_2 এর জন্যে $f(8, x_2)$-এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী নির্ণয় করব এবং তাদের ব্যবহার ক'রে আবার প্রক্ষেপণ নীতি সাহায্যে $f(8, 5)$-এর মান নির্ণয় করব। এজন্যে কতগুলি পার্থক্য সারণী গঠন করা প্রয়োজন।

পার্থক্য-সারণী

সারণী C.12

x_1	$y = f(x_1, 4)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	6·26			
		−·30		
10	5·96		·20	
		−·10		−·16
15	5·86		·04	
		−·06		
20	5·80			

সারণী C.13

x_1	$y = f(x_1, 6)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	4·39			
		−·34		
10	4·05		·23	
		−·11		−·19
15	3·94		·04	
		−·07		
20	3·87			

সারণী C.14

x_1	$y=f(x_1, 8)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	3·69			
		−·34		
10	3·35		·21	
		−·13		−·15
15	3·22		·06	
		−·07		
20	3·15			

সারণী C.15

x_1	$y=f(x_1, 10)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	3·33			
		−·35		
10	2·98		·22	
		−·13		−·17
15	2·85		·05	
		−·08		
20	2·77			

সারণী C.16

x_2	$y=f(8, x_2)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4	6·047			
		−1·899		
6	4·148		1·203	
		− ·696		−·875
8	3·452		·328	
		−·368		
10	3·084			

$f(8, 5)$-এর মান প্রক্ষেপণ সূত্র সাহায্যে নির্ণয় করতে আমরা C.2 10-এর শেষ অনুচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসরণ করব। এখানে

$$u = \frac{8-5}{5} = {\cdot}6.$$

প্রক্ষেপণ সাহায্যে নির্ণীত $f(x_1, x_2)$-এর মানকে $\phi(x_1, x_2)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হলে সারণী C.15 ব্যবহার ক'রে নিউটনের পুরোগামী সূত্র প্রয়োগে পাওয়া যায়

$$\phi(8, 4) = 6{\cdot}26 + {\cdot}6 \times (-{\cdot}3) + \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4)}{2} \times {\cdot}20$$
$$+ \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4)(-1{\cdot}4)}{6} \times (-{\cdot}16) = 6{\cdot}047\,;$$

তারপর একাদিক্রমে সারণী C.12 – C.16 ব্যবহার ক'রে এবং প্রতিবারই নিউটনের পুরোগামী সূত্র প্রয়োগে ও পূর্বপদক্ষেপে প্রাপ্ত তথ্য ব্যবহার ক'রে পাই

$$\phi(8, 6) = 4{\cdot}39 + {\cdot}6 \times (-{\cdot}34) + \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4)}{2} \times {\cdot}23$$
$$+ \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4) \times (-1{\cdot}4)}{6} \times (-{\cdot}19) = 4{\cdot}148\,;$$

$$\phi(8, 8) = 3{\cdot}69 + {\cdot}6 \times (-{\cdot}34) + \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4) \times ({\cdot}21)}{2}$$
$$+ \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4) \times (-1{\cdot}4)}{6} \times (-{\cdot}15) = 3{\cdot}452\,;$$

$$\phi(8, 10) = 3{\cdot}33 + {\cdot}6 \times (-{\cdot}35) + \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4)}{2} \times {\cdot}22$$
$$+ \frac{{\cdot}6 \times (-{\cdot}4) \times (-1{\cdot}4)}{6} \times (-{\cdot}17) = 3{\cdot}084$$

এবং অবশেষে $u \quad 5-4 = {\cdot}5$ ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

নির্ণেয় মান

$$\phi(8, 5) = 6{\cdot}047 + {\cdot}5 \times (-1{\cdot}8999) + {\cdot}5 \times (-{\cdot}5) \times \tfrac{1}{2} \times 1{\cdot}203$$
$$+ {\cdot}5 \times (-{\cdot}5)(-1{\cdot}5) \times \tfrac{1}{6} \times (-{\cdot}875) = 4{\cdot}89.$$

C.2.11 প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট পদ নির্ণয় :

এখন আমরা পূর্বালোচিত প্রক্ষেপণসূত্র প্রয়োগজনিত ভ্রান্তিপদ (বা অবশিষ্ট পদ) $R(x)$-এর স্বরূপ আলোচনায় প্রয়াসী হব। স্মরণীয় যে, $f(x)=\phi(x)+R(x)$-এ $\phi(x)$ হচ্ছে প্রক্ষেপণসূত্র ও $f(x)$ হচ্ছে অজ্ঞাত বা জটিল অপেক্ষক।

মনে কর x-এর $(n+1)$-সংখ্যক মান $x_0, x_1, \ldots, x_n$-এর জন্যে $f(x)$-এর মান জানা আছে $f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$, এবং $x=x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$-এর জন্যে $f(x_i)=\phi(x_i)$. তাহলে, যে কোন প্রকৃত মানাশ্রয়ী চল (real-valued variable) z-এর একটি অপেক্ষক $F(z)$ নিম্নলিখিতভাবে নির্দিষ্ট করা যাক :

$$F(z)=\{f(z)-\phi(z)\}-\{f(x)-\phi(x)\}\frac{(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}.$$

এখন, স্বীকার করা যাক্ যে,

(1) (x_0, x_n) অন্তরের মধ্যবর্তী সকল x-এর জন্যে f একটি অবিচ্ছিন্ন চল, এবং (2) (x_0, x_n) অন্তরের মধ্যবর্তী সকল x-এর জন্যে f-এর অন্ততঃ $(n+1)$-তম সবকটি অবিচ্ছিন্ন অন্তর্কলকের অস্তিত্ব রয়েছে।

তাহলে যেহেতু $g(z)=(z-x_0)(z-x_1)\cdots\cdots(z-x_n)$ হচ্ছে z-এর একটি $(n+1)$-ঘাতজ অপেক্ষক এবং তার ফলে সর্ত (1) ও (2) অপেক্ষক g-এর ক্ষেত্রে সত্য, কাজেই অপেক্ষক F-এর ক্ষেত্রেও এ দুটি খাটবে। তাছাড়া আরও দেখা যাচ্ছে যে,

$$z=x, x_0, \ldots, x_n \text{ হলে } F(z)=0 \text{ হবে।}$$

কাজেই রোল (Rolle)-এর উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায় যে, (x_0, x_n)-এর অন্তর্বর্তী x-এর মানের জন্যে $F'(z)$ অন্ততঃ n-সংখ্যকবার 0 মান গ্রহণ করবে এবং $F''(z)$ ঐ সকল x-এর জন্যে অন্ততঃ $(n-1)$-সংখ্যকবার 0 মান ধারণ করবে, ইত্যাদি। কাজেই, $F^{(n+1)}(z)=0$ হবে (x_0, x_n)-এর অন্তর্গত অন্ততঃ একটি x মানের জন্যে। মনে কর, ζ হচ্ছে এমনি একটি মান,

অর্থাৎ $x_0<\zeta<x_n$ এবং $F^{(n+1)}(\zeta)=0$.

আবার, প্রত্যেক z-এর জন্যে $g^{n+1}(z)=(n+1)!$,

এবং $\phi^{n+1}(\zeta)=0$, কারণ ϕ হচ্ছে একটি n-ঘাতজ অপেক্ষক। ফলে,

$$0=F^{(n+1)}(\zeta)=f^{(n+1)}(\zeta)-\{f(x)-\phi(x)\}\frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)-(x-x_n)}.$$

সুতরাং, $R(x)=f(x)-\phi(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$

এখানে $x_0, x_1, \ldots, x_n$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হতেও পারে বা না-ও হতে পারে এবং এই $R(x)$-কে নিউটনের পুরোগামী ও পশ্চাৎগামী এবং লাগ্রাঞ্জের প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট-পদ বলা যেতে পারে।

বিশেষতঃ যদি $x_0, \ldots, x_n$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয় ও $x_i - x_{i-1} = h > 0$ হয় $(i = 1, \cdots n)$ এবং $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ লেখা হয়,

তাহলে, $$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} u(u-1)\cdots(u-n+1)$$

এবং একে বলা যাবে নিউটনের পুরোগামী এবং পশ্চাৎগামী প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট-পদ।

স্টার্লিং এর প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট পদ নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা লিখ্‌ব

$$F(z) = [f(z) - \phi(z)]$$
$$- [f(x) - \phi(x)] \frac{(z - x_0)(z - x_1)(z - x_{-1})\cdots(z - x_n)(z - x_{-n})}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\cdots(x - x_n)(x - x_{-n})}$$

এবং মনে কর যে, $f(x)$-এর মান জানা আছে x-এর $(2n+1)$ সংখ্যক মান $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n$ ও x_{-n}-এর জন্যে। এখানে $x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ ও এই মানগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ও তাদের সাধারণ অন্তর হচ্ছে $h(>0)$ এবং $2n$-ঘাতজ প্রক্ষেপণ সূত্র $\phi(x)$ হচ্ছে এমন যে, $x = x_i\ (i = 0, \pm 1, \cdots \pm n)$-এর জন্যে $f(x_i) = \phi(x_i)$. সাধারণভাবে অবশ্য $R(x) = f(x) - \phi(x)$ হচ্ছে $\phi(x)$-এর অবশিষ্ট পদ। এখন f অপেক্ষকের ওপর পূর্বালোচিত (1) ও (2)-এর মতো দুটি শর্ত (1)′ ও (2)′ আরোপ করব।

শর্ত দুটি হ'ল :—

(1)′ (x_{-n}, x_n)-এর মধ্যবর্তী সব x-এর জন্যে f অবিচ্ছিন্ন ও (2)′ (x_{-n}, x_n)-এর অন্তর্বর্তী সব x-এর জন্যে f-এর অন্ততঃ $(2n+1)$-ক্রম পর্যন্ত সব কটি অবিচ্ছিন্ন অন্তর্কলক রয়েছে।

তাহলে, ঠিক আগের মতো যুক্তিতে, যদি ζ এমন একটি প্রকৃতরাশি হয় যে,

$x_{-n} < \zeta < x_n$ হলে $F^{(2n+1)}(\zeta) = 0$, তাহলে

$$0 = F^{(2n+1)}(\zeta)$$
$$= f^{(2n+1)}(\zeta) - R(x) \frac{(2n+1)!}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\cdots(x - x_n)(x - x_{-n})}.$$

সুতরাং,

$$R(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\zeta)}{(2n+1)\,!}\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_n)(x-x_{-n})$$

$$=\frac{f^{(2n+1)}(\zeta)}{(2n+1)\,!}\,u(u-1)(u+1)\cdots(u-n)(u+n)$$

[$u=\frac{x-x_0}{h}$ লিখে].

এটি হচ্ছে স্টার্লিং-এর প্রক্ষেপণ সূত্রের অবশিষ্ট পদ।

বেসেল সূত্রের অবশিষ্ট পদ (Remainder term of Bessel Formula).

ধরা যাক্ যে, x-এর $(2n+2)$-সংখ্যক মান $x_i(i=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\pm n,$ $n+1)$-এর জন্যে $f(x)$-এর মান দেওয়া আছে এবং $x_i-x_{i-1}=h>0,\ i=0,$ $\pm1,\cdots\pm n,\ n+1.$ এ ছাড়া মনে কর $(2n+1)$-ঘাতজ অপেক্ষক $\phi(x)$ হচ্ছে এমন একটি অপেক্ষক যে, $x=x_i\ (i=0,\ \pm1,\cdots\pm n,\ n+1)$-এর জন্যে $\phi(x_i)$ $=f(x_i)$ এবং সাধারণভাবে, $R(x)=f(x)-\phi(x)$ হচ্ছে $\phi(x)$-এর অবশিষ্ট পদ।

এখন নিম্নলিখিত মতো একটি অপেক্ষক F গ্রহণ করা যাক্ যার জন্যে দেওয়া আছে যে,

$$F(z)=\{f(z)-\phi(z)\}-\{f(x)-\phi(x)\}$$
$$\cdot\frac{(z-x_0)(z-x_1)(z-x_{-1})\cdots(z-x_n)(z-x_{-n})(z-x_{n+1})}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_n)(x-x_{-n})(x-x_{n+1})}.$$

এখন f অপেক্ষকের ওপর ছুটি সর্ত (1)″ ও (2)″ আরোপ করা যাক্। এই সর্তছুটি হল :—

(1)″ $(x_{-n},\ x_{n+1})$-এর অন্তর্গত সব x-এর জন্যে f অবিচ্ছিন্ন ;

(2)″ $(x_{-n},\ x_{n+1})$-এর অন্তর্গত সব x-এর জন্যে f-এর অন্ততঃ $(2n+2)$ ক্রম পর্যন্ত সব কটি অন্তর্কলকের অস্তিত্ব রয়েছে।

তাহলে, আগের মত যুক্তি অনুযায়ী পাওয়া যায় যে, যদি ζ এমন একটি প্রকৃতমানসম্পন্ন রাশি হয় যে,

$x_{-n}<\zeta<x_{n+1}$ হলে $F^{(2n+2)}(\zeta)=0$ হয়, তবে

$$0=F^{(2n+2)}(\zeta)=f^{(2n+2)}(\zeta)$$
$$-R(x)\,\frac{(2n+2)\,!}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{-n})(x-x_{n+1})}.$$

অর্থাৎ,

$$R(x)=\frac{F^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_n)(x-x_{-n})(x-x_{n+1})$$

$$=\frac{F^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}u(u-1)(u+1)\cdots(u-n)(u+n)(u-n-1),$$

$$\left[u=\frac{x-x_0}{h} \text{ লিখে }\right].$$

একে বলা হয় বেসেলের সূত্রজনিত অবশিষ্ট পদ (Remainder term in Bessel's formula).

C.3 সংখ্যাভিত্তিক সমাকলন (Numerical Integration) :

C.3.1 মনে কর, x ও y যেকোন দুটি চল এবং তাদের সম্পর্কে যা জানা আছে তা হচ্ছে এই যে, x-এর কতগুলি মান $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ দেওয়া আছে এবং সে অনুযায়ী y-এর মান যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ দেওয়া আছে। এখন, পরস্পর লম্ব (x, y) অক্ষদ্বয়ের অনুভূমিক অক্ষ বরাবর x এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর y-এর মান নিয়ে যদি $(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, n)$ বিন্দুগুলি একটি লেখচিত্রে সন্নিবিষ্ট করা হয়, তাহলে y-কে x-এর যেকোন একটি অপেক্ষক $f(x)$ বলে স্বীকার করলে $y_0, y_1, \ldots, y_n$ হবে $f(x)$-এর লেখের কোটি। এখন, $x=x_0$ থেকে $x=x_n$-এর মধ্যবর্তী অঞ্চলে $f(x)$-দ্বারা সূচিত রেখাতলবর্তী ক্ষেত্রের আয়তন হচ্ছে x_0 থেকে x_n পর্যন্ত $f(x)$ অপেক্ষকের সমাকলক। এখন, যদি $f(x)$-এর স্বরূপ জানা না থাকে বা জানা থাকলেও তা খুব জটিল প্রকৃতির হয়, তাহলে এই সমাকলকের মান নির্ণয় সম্ভব নয় বা সম্ভব হলেও খুব কষ্টসাধ্য। কিন্তু তা সত্ত্বেও উপরিউক্ত মানগুলির মাধ্যমে এই সমাকলকের মান আসন্নভাবে নির্ণয় করা সম্ভব। এজন্যে কয়েকটি প্রচলিত পদ্ধতি আছে। সেগুলির কয়েকটি সম্পর্কে আমরা এখন আলোচনা করব। এই উদ্দেশ্যে সাধারণ পদ্ধতিটি হচ্ছে এই যে, যে অন্তরমধ্যে $f(x)$-এর সমাকলক নির্ণয় করতে হবে, সেই অন্তরে $f(x)$-কে একটি সুবিধেমতো প্রক্ষেপণ সূত্র দিয়ে পরিবর্তিত করা এবং প্রদত্ত অন্তরে সেই প্রক্ষেপণ সূত্রটির সমাকলক নির্ণয় ক'রে তাকেই ঈপ্সিত সমাকলকটির একটি আসন্নমান হিসেবে ধরা। প্রক্ষেপণ-জনিত উদ্বৃত্ত অপেক্ষকটির সমাকলকটি হবে এই সমাকলন জনিত ভ্রান্তি। এই পদ্ধতিকে বলে সংখ্যাভিত্তিক সমাকলন (numerical integration).

মনে কর $f(x)$-কে নিউটনের পুরোগামী সূত্র দ্বারা পরিবর্তিত করা হ'ল। তাহলে লেখা যাবে

$$\phi(x)=f(x_0)+u\,\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)}{3\,!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots$$

এখানে, $u=\frac{x-x_0}{h}$, এবং ফলে, $h\,du=dx$.

তাহলে, $$\int_{x_0}^{x_0+nh}\phi(x)\,dx=h\int_0^n\Big[f(x_0)+u\,\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)}{3\,!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots\Big]du$$

$$=h\Big[\int_0^n f(x_0)\,du+\Delta f(x_0)\int_0^n u\,du+\Delta^2 f(x_0)\int_0^n\frac{u(u-1)}{2}du$$
$$+\Delta^3 f(x_0)\int_0^n\frac{u(u-1)(u-2)}{3\,!}du+\cdots\Big]$$

$$=h\Big\{f(x_0)\Big[u\Big]_0^n+\Delta f(x_0)\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^n+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\,!}\Big[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\Big]_0^n$$
$$+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3\,!}\Big[\frac{u^4}{4}-u^3+u^2\Big]_0^n+\cdots\Big\}$$

$$=u\Big[nf(x_0)+\frac{n^2}{2}\Delta f(x_0)+\Big(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}\Big)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}$$
$$+\Big(\frac{n^4}{4}-n^3+n^2\Big)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3\,!}+\cdots\Big]. \quad [\text{ C.3.1 }]$$

এই $\int_{x_0}^{x_0+nh}\phi(x)\,dx$-কে $\int_{x_0}^{x_0+nh}f(x)\,dx$-এর একটি আসন্ন মান বলে ধরা হয়।

উল্লিখিত সূত্র [C.3.1]-কে সংখ্যাভিত্তিক সমাকলনের একটি সাধারণ সূত্র হিসেবে (General Formula) ধরা যেতে পারে। এর আরও কিছু সংক্ষিপ্ত ও বিশেষতর রূপ নিয়ে এবার আমরা আলোচনা করব।

C.3.2 ট্র্যাপিজয়ডাল বিধি (Trapezoidal rule):

মনে কর $f(x)$-এর স্বরূপটি এমন যে, h দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন অন্তরে একে একটি ঋজুরৈখিক অপেক্ষক দ্বারা পরিবর্তিত করলে খুব ভ্রান্তি হয় না। অর্থাৎ $f(x)$-কে

ঐ রকম যে-কোন অন্তরে একটি একঘাতজ (অর্থাৎ ঋজুরৈখিক) অপেক্ষক দ্বারা পরিবর্তিত করা যেতে পারে। তাহলে, $\Delta f(x)$-কে ধ্রুবক ও $\Delta^r f(x)$-কে ($r > 1$ হলে) শূন্য ধরা যেতে পারে এবং নিউটনের পুরোগামী সূত্র অনুসরণ করলে x_k থেকে x_{k+1} মধ্যে $f(x)$-এর স্থলে তার আসন্নমান হিসেবে নেওয়া যায়

$$\phi_k(x) = f(x_k) + u_k\,\Delta f(x_k), \text{ যখন } \quad x_k < x < x_{k+1}\,;$$

এখানে $\quad u_k = \dfrac{x - x_k}{h}, \ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$

তাহলে আমরা পাব

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_k(x)\,dx = \int_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} \phi_k(x)\,dx$$

$$= h\int_0^1 \Big[f(x_k) + u_k\,\Delta f(x_k) \Big]\,du_k$$

$$= h\left\{ \int_0^1 f(x_k)\,du_k + \Delta f(x_k)\int_0^1 u_k\,du_k \right\}$$

$$= h\left\{ f(x_k)\Big[u_k\Big]_0^1 + \Delta f(x_k)\Big[\frac{u_k^2}{2}\Big]_0^1 \right\}$$

$$= h\Big[f(x_k) + \tfrac{1}{2}\Delta f(x_k) \Big] = \frac{h}{2}\Big[f(x_k) + f(x_{k+1}) \Big] \cdots \qquad \text{(C.26)}$$

$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_k(x)\,dx$-কে উল্লিখিত [C.26] সূত্রানুসারে নির্ণয় করার বিধিকে বলা হয় ট্র্যাপিজয়ডাল (Trapezoidal) বিধি। এই বিধি অনুসারে $\int^{x_0+nh} f(x)\,dx$-এর মান নির্ণয় করতে হলে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তর x_k থেকে x_{k+1}-এর মধ্যে $f(x)$-কে $\phi_k(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করে নিতে হয় এবং সেভাবে পাওয়া যায়

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{k+1} \phi_k(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{n-1}(x)\,dx$$ এবং একে

$\int^{x_0+nh} f(x)\,dx$-এর আসন্নমান বলে ধরা হয়। এখন,

ট্র্যাপিজয়ডাল বিধি অনুসারে $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_k(x)\, dx$-এর মান দাঁড়ায়

$$h\,[\{f(x_0)+\tfrac{1}{2}\Delta f(x_0)\}+\{f(x_1)+\tfrac{1}{2}\Delta f(x_1)\}+\cdots$$
$$+\{f(x_{n-1})+\tfrac{1}{2}\Delta f(x_{n-1})\}]$$
$$=\frac{h}{2}\Big[\Big\{f(x_0)+f(x_1)\Big\}+\{f(x_1)+f(x_2)\}+\cdots+\{f(x_{n-1})+f(x_n)\}\Big]$$
$$=\frac{h}{h}\Big[f(x_0)+2\{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\}+f(x_n)\Big] \qquad (C.27)$$

এই সূত্র সাহায্যে $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\ dx$-এর আসন্নমান নির্ণয়ের বিধিকেও ট্র্যাপিজয়ডাল বিধি বলা হয়। এরকম বলার কারণ এই যে, এই বিধির উৎপত্তির কথা মনে রাখলে বোঝা যাবে যে, যেকোন (x_k, x_{k+1}) অন্তরে $f(x)$-এর রেখাকে ঋজুরেখাদ্বারা পরিবর্তিত করার ফলে x_k থেকে x_{k+1} পর্যন্ত বিস্তৃত অনুভূমিক রেখার অংশ, $f(x_k)$ ও $f(x_{k+1})$-এর সমান দৈর্ঘ্যের $x=x_k$ ও $x=x_{k+1}$ এই উল্লম্বরেখাদ্বয় ও $f(x)$ রেখাদ্বারা সীমায়িত ক্ষেত্রটির স্থলে $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ ও $(x_{k+1}, 0)$ বিন্দুচতুষ্টয়কে পরস্পর চারটি সরলরেখাদ্বারা যুক্ত করলে যে ক্ষেত্রটি পাওয়া যায় সেটি হচ্ছে একটি ট্র্যাপিজিয়াম (Trapezium)। তেমনি সমাকলনে ব্যবহৃত সমগ্র (x_0, x_n)-এর জন্যে $f(x)$ রেখাদ্বারা নির্ধারিত সমগ্র ক্ষেত্রটির পরিবর্তে আমরা পাব পরস্পর সংযুক্ত ও সন্নিহিত n-সংখ্যক বিভিন্ন ট্র্যাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি।

ট্র্যাপিজয়ডাল বিধির উপযোগিতা হচ্ছে এই যে, এটির প্রয়োগ খুব সহজ এবং প্রত্যেক h দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তরে বাস্তবিক যদি $f(x)$-কে ঋজুরেখাদ্বারা পরিবর্তিত করলে বেশী ভ্রান্তি না হয়, তাহলে এই বিধি অনুসারে নির্ণীত সমাকলক ও আসল সমাকলকের মানের মধ্যে খুব তফাৎ হয় না। এমনকি h যদি খুব ছোট হয়, তাহলে ট্র্যাপিজয়ডাল বিধির ভ্রান্তি খুব কম হবে, কারণ খুব স্বল্পদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তরে যেকোন রেখাকে ঋজুরেখাদ্বারা পরিবর্তিত করলে বিশেষ ভুল হয় না।

C.3.3 সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি (Simpson's one-third rule) :

যদি $2h$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট প্রত্যেকটি অন্তরে $f(x)$-কে একটি দ্বিঘাতজ অপেক্ষক-

দ্বারা পরিবর্তিত করা হয় অর্থাৎ $\Delta^2 f(x)$-কে ধ্রুবক ও $\Delta^r f(x)$-কে $(r > 2)$ শূন্য বলে ধরা হয়, তাহলে $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx$-এর মান নির্ণয়ে সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি অনুসরণ করা হয়, অবশ্য যদি n নিজে 2-এর একটি অখণ্ড গুণনীয়ক হয়।

এখানে যেকোন অন্তর $(x_k, x_{k+2}) = (x_0 + kh,\ x_0 + (k+2)h)$-এর মধ্যে [মনে রাখতে হবে যে, $x_{k+2} = x_{k+2h}$] $f(x)$-কে নিউটনের পুরোগামী সূত্রানুসারী অপেক্ষক $\phi_k(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করা হয় ও তাতে তৃতীয় ও তদূর্ধ্ব-ক্রমিক পার্থক্যযুক্ত পদগুলি অগ্রাহ্য ক'রে লেখা হয়

$$\phi_k(x) = f(x_k) + u_k\,\Delta f(x_k) + \binom{u_k}{2}\Delta^2 f(x_k)\ ;$$

এখানে উল্লেখ্য যে, $u_k = \dfrac{x - x_k}{h}$, $x_k < x < x_{k+2}$;

ফলে, $h\,du_k = dx$.

এখন,

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} \phi_k(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+2}} \left[f(x_k) + u_k\,\Delta f(x_k) + \binom{u_k}{2}\Delta^2 f(x_k)\right]dx$$

$$= h\int_0^2 \left[f(x_k) + u\,\Delta f(x_k) + {}_k\binom{u_k}{2}\Delta^2 f(x_k)\right] du_k$$

$$= h\left\{f(x_k)\Big[u_k\Big]_0^2 + \Delta f(x_k)\left[\frac{u_k^2}{2}\right]_0^2 + \frac{\Delta^2 f(x_k)}{2}\left[\frac{u_k^3}{3} - \frac{u_k^2}{2}\right]_0^2\right.$$

$$= h\,\{2f(x_k) + 2\Delta f(x_k) + \tfrac{1}{3}\Delta^2 f(x_k)\}$$

$$= \frac{h}{3}\Big[6f(x_k) + 6f(x_{k+1}) - 6f(x_k) + f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k)\Big]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(x_{k+2}) + 4f(x_{k+1}) + f(x_k)\Big] \qquad \cdots \quad C.28$$

এই [C. 28] সূত্রানুসারে $\int_{x_k}^{x_{k+2}} \phi_k(x)$-এর মান নির্ণয় করে তাকে $\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx$-এর আসন্ন মান হিসেবে গ্রহণ করার বিধিকে সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি (Simpson's one-third rule) বলা হয়। সূত্রটিতে সাধারণ উৎপাদক $\frac{1}{3}$-এর উপস্থিতির জন্যেই একে এরূপ নাম দেওয়া হয়েছে। এখন, যদি

$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$-এর মান নির্ণয় করতে হয়, তাহলে প্রতিটি $2h$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তর (x_k, x_{k+2})-এর মধ্যে $f(x)$ কে $\phi_k(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করে $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$-এর মানের আসন্নমান হিসেবে গ্রহণ করা হয়

$\sum_{k=0}^{n-2} \int_{x_k}^{x_{k+2}} \phi_k(x)dx$-এর মান ওপরের [C.28] সূত্রানুসারে যা দাঁড়াবে

$$\frac{h}{3}[\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\}+\{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\} + \cdots + \{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}]$$

$$= \frac{h}{3}[\{f(x_0)+f(x_n)\}+4\{f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\} + 2\{f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})\}]. \qquad (C.\ 29)$$

এই সূত্রানুসারে, $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$-এর মান নির্ণয়ের বিধিকেও সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি বলে। ফলতঃ, এই বিধিপালনে $f(x)$ রেখাটিকে (x_0, x_2), (x_2, x_4)...(x_{n-2}, x_n)—এই $\left(\frac{n}{2}\right)$ সংখ্যক পরস্পর সন্নিহিত অন্তরের প্রত্যেকটিতে একটি ক'রে দ্বিঘাতজ অপেক্ষক সাহায্যে পরিবর্তিত করা হয় এবং x_0 থেকে x_n পর্যন্ত অন্তরমধ্যে $f(x)$ রেখাতলবর্তী ক্ষেত্রের আয়তন $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$-এর মান নির্ণয়ে $\left(\frac{n}{2}\right)$ সংখ্যক বিভিন্ন ক্ষেত্রের আয়তনের সমষ্টি নির্ণয় করা হয়। এই শেষোক্ত ক্ষেত্রগুলির k-তম ক্ষেত্রটি হচ্ছে $(x_k, 0)$ ও $(x_k, f(x_k))$ বিন্দুদ্বয় এবং $(x_{k+2}, 0)$ ও $(x_{k+2}, f(x_{k+2}))$ বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখাদ্বয়ের শীর্ষের সঙ্গে $\phi_k(x)$ রেখা যোগ করে যে রেখা হয় তার নিম্নবর্তী $(x_k, 0)$ ও $(x_{k+1}, 0)$ বিন্দুদ্বয় মধ্যে আবদ্ধক্ষেত্র এবং এই ক্ষেত্রের আয়তন হচ্ছে $\int_{x_k}^{x_{k+2}} \phi_k(x)dx$. আসলে এই বিধি প্রয়োগে মূল $f(x)$ রেখাকে $\frac{n}{2}$ সংখ্যক বিভিন্ন দ্বিঘাতজ রেখার পরস্পর সংযুক্ত অংশদ্বারা পরিবর্তিত করা হয়।

যদি $f(x)$-কে প্রত্যেক $2h$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তরে একটি ক'রে দ্বিঘাতজ অপেক্ষক দ্বারা সম্যকরূপে নির্দিষ্ট করা যায় ও তাতে ভ্রান্তি কম হয়, তাহলে সিম্পসনবিধি

অনুযায়ী নির্ণীত সমাকলক ও প্রকৃত সমাকলকে পার্থক্য কম হয়। বলা বাহুল্য যে, এই বিধির সার্থক প্রয়োগে h-এর মান যথাসাধ্য কম রাখাই বাঞ্ছনীয়।

উদাহরণ C.14. নীচের সারণীতে বিভিন্ন সময়ে একটি শকটের গতিবেগের মান দেওয়া হ'ল।

সারণী C.17

সময় (ঘণ্টা মিনিট)	গতিবেগ (ঘণ্টা প্রতি মাইল)
11 — 50	24·2
12 — 00	35·0
12 — 10	41·3
12 — 20	42·8
12 — 30	39·2

11-50 মিনিট থেকে 12-30 মিনিট সময়ে মোট কত মাইল পথ অতিক্রান্ত হয়েছে, তা উপযুক্ত সংখ্যাভিত্তিক সমাকলন সাহায্যে নির্ণয় কর।

এখন সময়কে স্বনির্ভর চল x এবং গতিবেগকে x-এর ওপর নির্ভরশীল চল y বলে ধরা যেতে পারে এবং এই y হচ্ছে x এর একটি অপেক্ষক $y=f(x)$ (ধর) এবং এর কয়েকটি মান দেওয়া আছে। এখানে x-এর প্রদত্ত মানগুলি সমান্তর-বিশিষ্ট এবং সাধারণ অন্তর হচ্ছে 10 মিনিট বা $\frac{1}{6}$ ঘণ্টা। এখানে ট্রাপিজয়ডাল বা সিম্পসন বিধি প্রয়োগ করা যেতে পারে। ট্র্যাপিজয়ডাল বিধি অনুযায়ী নির্ণেয় অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্যের পরিমাপ হবে

$$I_T=\int_{11\text{-}50}^{12\text{-}30} f(x)dx=\int_{11\text{-}50}^{12\text{-}00} f(x)dx+\int_{12\text{-}00}^{12\text{-}10} f(x)dx+\int_{12\text{-}10}^{12\text{-}20} f(x)dx+\int_{12\text{-}20}^{12\text{-}30} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}[24{\cdot}2+2(35{\cdot}0+41{\cdot}3+42{\cdot}8)+39{\cdot}2]$$

$$=\frac{1}{12}\times 301{\cdot}6=25{\cdot}13 \text{ মাইল।}$$

সিম্পসনের বিধি অনুযায়ী এই দৈর্ঘ্য হবে

$$I_s = \int_{11\cdot50}^{12\cdot10} f(x)dx + \int_{12\cdot10}^{12\cdot30} f(x)dx$$

$$= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{6}[24.2 + 4(35\cdot0 + 42\cdot8) + 2 \times 41\cdot3 + 39\cdot2]$$

$$= \tfrac{1}{18} \times 457\cdot2 = 25\cdot40 \text{ মাইল।}$$

টীকা। বিকল্পে x-এর উপযুক্ত অন্তরমধ্যে $f(x) = a + bx$ ও $f(x) = a + bx + cx^2$ ধরে নিয়ে সমাকলন করে I_T ও I_S-এর সঙ্গে তুলনীয় দুটি মান নির্ণয় কর।

C.3.4. সিম্পসনের বিধিসংক্রান্ত ভ্রান্তি :

মনে কর $(x_0 - h, x_0 + h)$ অন্তর মধ্যে $f(x)$ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন ও অন্ততঃ চতুর্থ-ক্রম পর্যন্ত অবিচ্ছিন্ন অন্তর্কলকযুক্ত। এখন $F(x) = \int_k^x f(x)dx$ লিখে পাওয়া যায় $(k \leqslant x_0 - h)$

$I = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = F(x_0 + h) - F(x_0 - h)$ এবং সিম্পসনের এক-তৃতীয়াংশ বিধি অনুযায়ী নির্ণীত I-এর আসন্ন মান I_S হচ্ছে

$I_S = \frac{h}{3}\left[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)\right]$. তাহলে সিম্পসনের বিধি প্রয়োগে সঞ্জাত ভ্রান্তি হচ্ছে $E_S = I - I_S$. এখন $F(x_0 + h)$, $F(x_0 - h)$, $f(x_0 + h)$ ও $f(x_0 - h)$-এর টেলার সম্প্রসারণ (Taylor's expansion) বিবেচনা ক'রে [এবং $F'(x) = f(x)$—একথা মনে রেখে] পাওয়া যায় $E_S = -\frac{h^5}{90} f^{iv}(x_0)$.

[এখানে $f^{iv}(x) = \frac{d^4}{dx^4} f(x)$]. আবার $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ $(h > 0$, $i = 1, 2, \ldots n)$ এবং $x_n = b$ লিখে এবং $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ও তার সিম্পসনবিধি-অনুযায়ী নির্ণীত আসন্ন মান $I_S = \frac{h}{3}[\{f(x_0) + f(x_n)\} + 4\{f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\} + 2\{f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})\}]$ বিবেচনা ক'রে [$n = 2$-এর অখণ্ড গুণনীয়ক ধরে] ভ্রান্তিপদ পাওয়া যায় $E_S = I - I_S = -\frac{h^5}{90}[f^{iv}(x_1) + f^{iv}(x_3) + \cdots + f^{iv}(x_{n-1})]$.

এখন $u=\frac{x-k}{h}$ লিখে [$k=x_0, x_1, x_3, \ldots$ ইত্যাদি] এবং ষ্টার্লিং-এর প্রক্ষেপণ-সূত্র প্রয়োগ ক'রে লেখা যায়

$$y=f(x)=f(k+hu)=y_k+u\frac{\Delta y_k+\Delta y_{k-h}}{2}+\frac{u^2}{2}\Delta^2 y_{k-2h}$$
$$+\frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{k-h}+\Delta^3 y_{k-2h}}{2}+\cdots$$

এখন $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy}{dx},$

$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h}\frac{d^2y}{dx\,du}=\frac{1}{h^2}\frac{d^2y}{dx^2}$ ইত্যাদি মনে রেখে এবং $f^{iv}(x)$ এর প্রকাশনে $u=0$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$f^{iv}(k)=\frac{\Delta^4 y_{k-2h}}{h^4}.$ কাজেই $k=x_1, x_3, \ldots x_{n-1}$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$E_S=-\frac{h}{90}[\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_1+\Delta^4 y_3+\cdots+\Delta^4 y_{n-3}]$$

এখন, h-এর দুটি বিভিন্ন মান h_1 ও h_2 ব্যবহার ক'রে যদি দু'বার সিম্পসনের বিধি প্রয়োগ ক'রে I_s-এর মান নির্ণয় করা হয় ও তজ্জনিত ভ্রান্তিদ্বয়কে E_1 ও E_2 লেখা হয় তাহলে পাওয়া যায় $\frac{E_1}{E_2}=\frac{h_1^4}{h_2^4}$ অর্থাৎ $E_1=\frac{h_1^4}{h_2^4}E_2.$

তাহলে $h_2=\frac{h_1}{2}$ বেছে নিলে, $E_1=16E_2.$ আবার h_1 ও h_2 ব্যবহার ক'রে সিম্পসন বিধি প্রয়োগে প্রাপ্ত আসন্নমান দুটিকে যথাক্রমে R_1 ও R_2 লিখলে পাওয়া যায়

$$I=R_1+E_1=R_1+16E_2 \text{ এবং } I=R_2+E_2.$$

ফলে $E_2=\frac{R_2-R_1}{16}.$

C.4 একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি সম্বলিত সমীকরণের সংখ্যাভিত্তিক সমাধান (Solutions of numerical equations involving only one unknown) :

C.4.1 একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি সম্বলিত যে কোন একটি সমীকরণকে $f(x)=0$—এই আকারে প্রকাশ করা যায় যাতে $f(x)$ হচ্ছে x চলটির যে কোন

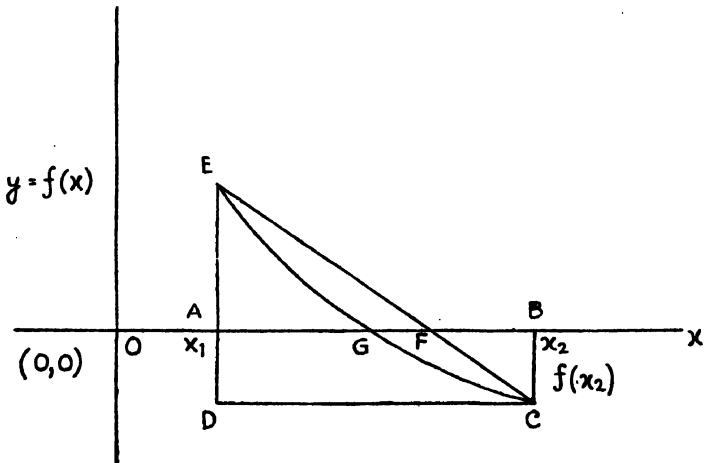
একটি অপেক্ষক। আমরা শুধু সেইসব ক্ষেত্রেই বিবেচনা করব যেখানে $f(x)$-এর মধ্যে x-সম্বলিত যে কোন পদ ও x-মুক্ত যে কোন পদের সহগগুলি সবই হচ্ছে কতগুলি প্রদত্ত প্রকৃত সংখ্যা। তাহলে, $f(x)$ যদি সাধারণ একটি বা কয়েকটি সর্ত মেনে চলে, তবে এজাতীয় সমীকরণের অন্ততঃ চলনসই ধরনের আসন্ন বীজ শুদ্ধতার যে কোন ঈপ্সিত মাত্রা (desired degree of accuracy) পর্যন্ত নির্ণয় করা যেতে পারে। এজাতীয় সমাধান নির্ণয়ের কয়েকটি পদ্ধতি এখন আমরা বর্ণনা করব।

বলা বাহুল্য লেখচিত্রাঙ্কন এব্যাপারে আমাদের খুব সাহায্য করবে। যে ভুজবিন্দুতে কোটির মান শূন্য অর্থাৎ যে ভুজবিন্দুতে $f(x)$-এর রেখা অনুভূমিক রেখাকে ছেদ করে, তার ভুজাঙ্ক $f(x)=0$-এর একটি বীজ হবে; যদি ঐ ছেদবিন্দুর ভুজাঙ্কের উভয় পার্শ্ব বিস্তৃত কোন অন্তর মধ্যে $f(x)$ রেখা অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে লেখচিত্র সাহায্যে সমীকরণটির একটি আসন্ন সমাধান পাওয়া যায়। এই পদ্ধতিতে অবশ্য নির্ণেয় বীজটি নিখুঁতভাবে পাওয়া যায় না, কারণ লেখচিত্র সাহায্যে ভুজাঙ্কটির পরিমাপ করতে কিছুটা ভ্রান্তি হবে; তাছাড়া এপদ্ধতি নিতান্ত ব্যক্তি নির্ভর (subjective) এবং নির্ণীত বীজের ভ্রান্তির পরিমাপও বস্তুনিষ্ঠ (objective)-ভাবে অনুমান করা যায় না। কাজেই এই পদ্ধতিযোগে নির্ণীত রাশিকে নির্ণেয় মূলের একটি নিছক স্থূল (crude) আসন্ন মান মাত্র বলে স্বীকার করা যেতে পারে। এই পদ্ধতির একটু রকমফের হচ্ছে দ্বিতীয় পদ্ধতিটি। এতে যদি কোন অন্তর (a, b) মধ্যে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হয় এবং $f(a)$ ও $f(b)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়, তাহলে $x=a$ ও $x=b$-এর মধ্যে এক বা একাধিক মান α থাকতে পারে $(a<\alpha<b)$ যার জন্যে $f(\alpha)=0$ এবং এরূপ প্রত্যেকটি α-ই হচ্ছে $f(x)$-এর এক একটি মূল। তাহলে $f(x)$-এর লেখচিত্র থেকে এরকম α-এর মান নির্ণয়ের চেষ্টা করা হয় অথবা পর্যবেক্ষণের সাহায্যেও ক্রমাগত ভ্রান্তি ও অধ্যবসায়যোগে (by repeated trial and error) α-এর মান আসন্নভাবে জানা যেতে পারে যদি a ও b এমনভাবে খুঁজে নেওয়া হয় যাতে $f(a)$ ও $f(b)$ যদিও 0 থেকে পৃথক কিন্তু 0-এর সঙ্গে এদের পার্থক্য খুব নগণ্য পরিমাণ হয়। এ পদ্ধতিতেও নির্ভুলভাবে মূলটি নির্ণয় করা সম্ভব নয়। এভাবে মূল নির্ণয় ক'রে আবার যদি (a, b)-এর কোন উপ-অন্তর (a_1, b_1) [লক্ষণীয় যে $(a<a_1<b_1<b)$]-এর জন্যেও একইভাবে একটি মূল বার করা হয় এবং এইভাবে বারবার এই পদ্ধতি অনুসরণ ক'রে (a, b)-এর দৈর্ঘ্য

ক্রমান্বয়ে ছোট ক'রে নেওয়া হয় এবং খুব ছোট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অন্তর (a', b')-এর জন্যে এভাবে একটি বীজ (root) নির্ণয় করা হয়, তাহলে তা আসল বীজের খুব কাছাকাছি হবে।

এখন আমরা তিনটি বিশেষ উল্লেখযোগ্য সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করব যাদের প্রয়োগেও উপরিউক্ত পদ্ধতি বা অন্য যে কোন পদ্ধতি অনুসারে বাঞ্ছিত বীজটির প্রাথমিক আসন্নমান নিয়ে সমাধান কাজ সুরু করা হয়। বাস্তবিক, ঐ পদ্ধতিগুলি হচ্ছে প্রাথমিক পরীক্ষামূলক ভাবে নির্ণীত মূলের উন্নতি-সাধনেরই পন্থা।

C.4.2 ভ্রান্ত অবস্থিতি পদ্ধতি (Method of false position) :

সংখ্যাভিত্তিক সমীকরণের প্রকৃত বীজ নিরূপণের এটি অন্যতম সুপ্রাচীন পদ্ধতি। মনে কর, $f(x)=0$ এই সমীকরণ-সংশ্লিষ্ট $f(x)$-এর প্রকৃতি এমন যে, খুব নিকটবর্তী দুটি বিন্দু x_1 ও x_2-তে $f(x)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (x_1, x_2)-অন্তরে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন ও তার রেখাটির গতি অতিশয় মসৃণ (smooth), যার ফলে ঐ অন্তরমধ্যে $f(x)$-রেখাকে একটি ঋজুরেখাদ্বারা পরিবর্তিত করলে খুব ভ্রান্তি হয় না। এই পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য নীচের চিত্রটি থেকে অনেকটা স্পষ্ট হবে।

চিত্র নং C.1

এতে, $|f(x_1)| = AE$ দৈর্ঘ্য, $|f(x_2)| = BC$ দৈর্ঘ্য, $OA = x_1$, $OB = x_2$,
$f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, $x_1 < x_2$.

[বাস্তবিক, যদি $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ হয়, তবে তদনুযায়ী চিত্রটির আকার যথাযোগ্যভাবে পরিবর্তিত হবে]।

চিত্রে মনে কর, মাপনা-মাত্রাটি এরূপ নেওয়া হয়েছে যে, যদিও $(x_2 - x_1)$ এর মান খুব ছোট তবুও $x_2 - x_1 = AB$ দৈর্ঘ্য হিসেবে যথেষ্ট বড় দেখানো হয়েছে। যাই হোক্‌ $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি প্রকৃতবীজ হবে $x_0 = OG$ দৈর্ঘ্যের সমান। আলোচ্য সমাধান পদ্ধতিতে এরপর (x_1, x_2)-অন্তরে $f(x)$ রেখাকে CE সরলরেখাদ্বারা পরিবর্তিত বলে ধরে নেওয়া দরকার। তাতে $x'_0 = OF$ কে নেওয়া হচ্ছে OG-এর একটি আসন্নমান হিসেবে। চিত্র থেকে যদিও GF-কে খুব ছোট দেখা যাচ্ছে না, আসলে কিন্তু এর মান (অর্থাৎ আসল বীজ ও তার আসন্নমানের পার্থক্য) খুবই কম হবে, কারণ $(x_2 - x_1)$-এর পরিমাণ খুবই কম। এখন আলোচ্য পদ্ধতিতে OF-এর মান নির্ণয়েরই এক বীজগাণিতিক সূত্র প্রতিষ্ঠা করা হবে। চিত্র থেকে স্পষ্টতঃই বোঝা যাচ্ছে যে, EAF ও EDC দুটি সদৃশ ত্রিভুজ। কাজেই,

$$\frac{AF}{DC} = \frac{EA}{ED} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{OF - OA}{AB} = \frac{EA}{EA + AD}$$

অর্থাৎ, $$\frac{OF - OA}{OB - OA} = \frac{EA}{EA + BC}$$

অর্থাৎ, $$\frac{x'_0 - x_1}{x'_2 - x_1} = \frac{|f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

অর্থাৎ, $$x'_0 = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{|f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}. \qquad \text{(C.30)}$$

এই সূত্রানুসারে, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি প্রকৃতবীজ নির্ণয়ের পদ্ধতিকে বলে ভ্রান্ত অবস্থিতি নির্ণয়ণ পদ্ধতি। এখন আসল বীজটির খুব নিকটবর্তী আসন্নমান নির্ণয় করতে হলে এই পদ্ধতিটি বারবার অনুসরণ করা প্রয়োজন হতে পারে এবং সেক্ষেত্রে বারবার এই সূত্র-প্রয়োগ (C.30) করা দরকার।

C.4.3 নিউটন-র‍্যাফসনের পদ্ধতি (Newton-Raphson Method) :

$f(x) = 0$ এই সমীকরণটির সমাধানে নিউটন ও র‍্যাফসনের পদ্ধতি প্রয়োগ করা যাবে যদি $f(x)$-এর প্রথম অন্তর্কলকের (1st derivative) অস্তিত্ব থাকে ও তা অবিচ্ছিন্ন হয়, তাকে সহজে নির্ণয় করা যায় এবং তার প্রকাশন সূত্র

জটিল না হয়। এখন মনে কর, x_0 হচ্ছে $f(x)=0$-এর একটি আসন্ন বীজ যার মান লেখসাহায্যে বা অন্য যেকোন উপায়ে নির্ণীত হয়েছে। ধরা যাক্ আসল বীজটি x এবং মনে কর, $x=x_0+h$ অর্থাৎ h হচ্ছে x-এর প্রাথমিক আসন্নমান x_0 (লেখচিত্র ব্যবহারযোগে বা অন্যকোন উপায়ে অনুমিত)-এর ভ্রান্তি অর্থাৎ x_0-এর সঙ্গে একটি শুদ্ধিপদ (correction term) h যোগ করলে তবে আসল বীজ x পাওয়া যায়। তাহলে, লেখা যাবে $f(x)=f(x_0+h)$ এবং একে টেলারের বিস্তৃতি সারিতে (Taylor's expansion) প্রকাশ করলে পাওয়া যাবে

$$0=f(x)=f(x_0+h)$$
$$=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta h),\ |\theta|<1.$$

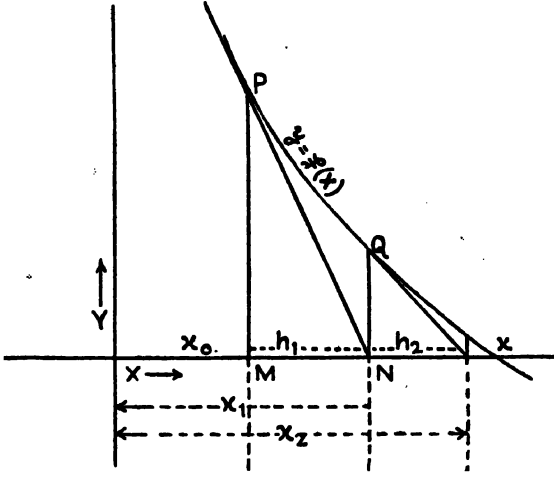
এখন, x_0 যদি যথাসম্ভব অভ্রান্তভাবে নির্ণীত হয়, যার ফলে $x-x_0$ অর্থাৎ h-এর পরিমাণ খুবই সামান্য হয়, তাহলে h^2-এর মান $|h|$-এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর হবে। কাজেই h^2 সম্বলিত পদটিকে অগ্রাহ্য করলে খুব ভ্রান্তি হবে না। তাহলে, মোটামুটিভাবে লেখা যাবে

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0 \text{ অর্থাৎ } h=\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{C.31}$$

একে আমরা লিখব $h_1=\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$ এবং বলব যে, h_1 হচ্ছে x_0-এর ওপর প্রযোজ্য প্রথম শুদ্ধিপদ এবং

$$x_0+h_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \cdots \tag{C.32}$$

কে আমরা x_0-এর চেয়ে x-এর আরও সন্নিকটবর্তী আসন্ন বীজ হিসেবে গ্রহণ করব। এই (x_0+h_1)-কে x_1 লিখে যদি x_1-কে x-এর একটি আসন্নমান হিসেবে ধরি, তাহলে h_2 হবে এর ওপর প্রযোজ্য শুদ্ধিপদ। অর্থাৎ $x_1+h_2=x$ এবং এর পর h_2-এর মান নির্ণয়ে ওপরে বর্ণিত পদ্ধতি প্রয়োগ ক'রে x-এর সঙ্গে x_1-এর চেয়ে আরও ঘনিষ্ঠ আসন্ন বীজ পাওয়া যাবে। যতক্ষণ না পরপর দুটি এরূপে নির্ণীত আসন্নমান সমান বা প্রায় সমান না হচ্ছে ততক্ষণ পর্যন্ত এইভাবে অগ্রসর হতে হবে। এই পদ্ধতিকেই বলে নিউটন ও র‍্যাফসনের পদ্ধতি। এই পদ্ধতির সার্থক প্রয়োগের জন্যে x_0, x_1 ইত্যাদি বিন্দুর উভয়পার্শ্ব বিস্তৃত নিকটবর্তী অঞ্চলে $f'(x)$-এর মান যথাসম্ভব বৃহৎ হওয়া বাঞ্ছনীয় এবং

বাস্তবিক যদি ঐ অঞ্চলে $f'(x)$-এর মান শূন্য বা শূন্যের কাছাকাছি হয়, তাহলে এই পদ্ধতি ব্যর্থতায় পর্যবসিত হবে।

চিত্র নং C.2

ওপরের চিত্র থেকে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য সম্বন্ধে কিছু ধারণা করা যায়। এতে $f(x)$ রেখার লেখচিত্র আঁকা রয়েছে। OX দৈর্ঘ্য হচ্ছে আসল বীজ x-এর সমান এবং OM ও ON হচ্ছে যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় আসন্নমান x_0 ও x_1-এর সমান, NM হচ্ছে h_1-এর সমান, PN হচ্ছে P বিন্দু অর্থাৎ $(x_0, f(x_0)$ বিন্দুতে অঙ্কিত $f(x)$ রেখার ওপর স্পর্শক (tangent). এখন যদি লেখা যায় $\theta = \angle PNM$, তাহলে $f'(x_0) = -\tan\theta = -\dfrac{f(x_0)}{h}$ অর্থাৎ

$h_1 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. এ থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে, নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগে প্রথম শুদ্ধিপদ (h_1) নির্ণয় ক'রে প্রাথমিক আসন্ন বীজের (x_1) চেয়ে শুদ্ধতর যে বীজটি নির্ণীত হয় জ্যামিতিগতভাবে সেটি হচ্ছে প্রাথমিক আসন্ন বীজসূচক বিন্দুতে উত্তোলিত উলম্ব রেখা ও $f(x)$ রেখার ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত $f(x)$ রেখার ওপর স্পর্শকের সংঙ্গে অনুভূমিক রেখার ছেদবিন্দুর ভুজ। পরবর্তী শুদ্ধতর আসন্ন বীজগুলিও অনুরূপভাবে স্পর্শকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়, যেমন চিত্রে আভাসিত হয়েছে।

C.4.4 পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি (Method of iteration) :

যদি $f(x)=0$ এই সমীকরণটিকে $x=\phi(x)$ রূপে প্রকাশ করা যায়, তাহলে এর সমাধানে পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি (Iterative method) প্রয়োগ করা যায়। এখানে $\phi(x)$ হচ্ছে x-এর যেকোন অপেক্ষক যার বীজগাণিতিক গঠন খুব জটিল নয় এবং যাতে x-মুক্ত পদ ও x-যুক্ত পদের সহগগুলি হচ্ছে কতগুলি প্রদত্ত প্রকৃত রাশি। এই সমাধান পদ্ধতিতে প্রথমে লেখচিত্র সাহায্যে বা অন্য যে কোন উপায়ে $f(x)=0$ এর একটি প্রাথমিক (initial) আসন্ন বীজ x_0 নির্ণয় করা হয়, যা প্রকৃত বীজ x_0 এর থেকে সাধারণতঃ পৃথক্ হবে। এখন $\phi(x)$ এর প্রকাশনে (expression) x-এর পরিবর্তে x_0 বসিয়ে $\phi(x_0)$-এর মান নির্ণয় করা হবে এবং তাকে x_1 দিয়ে নির্দেশ ক'রে x_1-কে x-এর উৎকৃষ্টতর (closer) অর্থাৎ x_0-এর তুলনায় x এর অধিকতর নিকটবর্তী আসন্নবীজ বলে গ্রহণ করা হবে। অর্থাৎ লেখা হবে

$$x_1=\phi(x_0) \text{ এবং অনুরূপে পর পর লেখা হবে}$$
$$x_2=\phi(x_1)$$
$$x_3=\phi(x_2)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_n=\phi(x_{n-1})$$

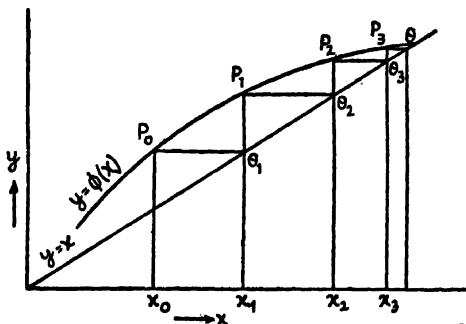
এবং x_n-কে ধরা হবে প্রাথমিক পরীক্ষামূলক আসন্নবীজ x_0-এর n-তম শুদ্ধিরূপ। এইভাবে অগ্রসর হয়ে তখনই থামতে হবে যখন কোন k-এর জন্যে x_k ও x_{k+1}-এর মান সমান বা প্রায় সমান হবে। এদেরকে কখন প্রায় সমান বলা হবে তা নির্ভর করবে কতটা শুদ্ধরূপে $f(x)=0$-এর বীজটি নির্ণয় করা প্রয়োজন তার ওপর। এই পদ্ধতিকে পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি বলে। এখন এই পদ্ধতি অনুযায়ী নির্ণীত আসন্নবীজগুলির আসল বীজ x-এর অভিমুখে অগ্রসর হবার প্রবণতা দেখা যাক্। আমরা লিখতে পারব

$$x-x_1=\phi(x)-\phi(x_0)=(x-x_0)\,\phi'(\xi_0), \quad x_0<\xi_0<x$$
$$x-x_2=\phi(x)-\phi(x_1)=(x-x_1)\,\phi'(\xi_1), \quad x_1<\xi_1<x$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x-x_n=\phi(x)-\phi(x_{n-1})$$
$$=(x-x_{n-1})\,\phi'(\xi_{n-1}), \quad x_{n-1}<\xi_{n-1}<x.$$

কাজেই $x-x_n=(x-x_0)\,\phi'(\xi_0)\,\phi'(\xi_1)\quad\phi'(\xi_{n-1})$.

তাই, $x_0 < y < x$ হলে, যদি $|\phi'(y)| < M$ হয়,

তবে সেই সর্তে $|x-x_n| < |x-x_0|\,M^n$ হবে,

এবং $M < 1$ হলে n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে আসন্নবীজ x_n ক্রমশঃ আসল বীজ x এর নিকটবর্তী হতে থাকবে। কাজেই "আসল বীজ x-এর নিকটবর্তী সমস্ত y-এর জন্যে $|\phi'(y)| < 1$ হবে" এটিই হচ্ছে পুনরাবৃত্ত পদ্ধতিতে নির্ণীত বীজগুলির প্রকৃত বীজ অভিমুখে অগ্রসরণের প্রবণতার (convergence) সর্ত এবং এই সর্তেই এ পদ্ধতির প্রয়োগ সার্থক। এই পদ্ধতিতে নির্ণীত আসন্ন বীজগুলির জ্যামিতিক তাৎপর্য নিম্নের চিত্রের মাধ্যমে আভাসিত হয়েছে।

চিত্র নং C.3

এখানে $y=x$ ও $y=\phi(x)$-এর ছেদবিন্দুর ভুজাঙ্কই হচ্ছে $f(x)=0$-এর আসল বীজ এবং $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি

$x_1=\phi(x_0),\ x_2=\phi(x_1),\ x_3=\phi(x_2),\cdots$ ইত্যাদি সমীকরণগুলির প্রতিনিধিত্ব করছে। এখানে $y=\phi(x)$ রেখার বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এই যে, $y=x$ রেখার সঙ্গে এর ছেদবিন্দুর নিকট $y=x$ রেখার উপর এর নতিকোণ θ (angle of inclination) এর পরিমাণ এমন যে $\tan\theta < 1$. যার ফলে ওপরে বর্ণিত পুনরাবৃত্ত পদ্ধতির সার্থকতার সর্ত পালিত হয়েছে এবং সেজন্যেই $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, ইত্যাদি ক্রমান্বয়ে $y=x$ ও $y=\phi(x)$ এর ছেদবিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। $\tan\theta > 1$ হলে $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ক্রমাগত ঐ ছেদবিন্দু থেকে দূরে সরে যেত এবং পুনরাবৃত্ত পদ্ধতিটি অসার্থক হয়ে পড়ত।

সমীকরণের বীজনির্ণয়ে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক্।

উদা. C.15 $x^3-2x-2=0$ সমীকরণটির চার-দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন একটি প্রকৃতমান সম্পান্ন বীজ নির্ণয় কর।

পর্যবেক্ষণ সূত্রে দেখা যায় যে, $f(x)=y=x^3-2x-2$-এর মান যথাক্রমে ঋণাত্মক ও ধনাত্মক হয় যখন x-এর মান 1·76 ও 1·77-এর সমান,

কারণ $y_1=f(1\cdot76)=-0\cdot0682$

এবং $y_2=f(1\cdot77)=\ \ 0\cdot0052.$

তাহলে, ভ্রান্ত অবস্থিতি পদ্ধতি অনুসারে সমাধান নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা লিখতে পারি

$$x_1=1\cdot76 \text{ ও } x_2=1\cdot77. \quad \text{তাহলে } h=x_2-x_1=0\cdot01$$

ও $$c_1=\frac{|y_1|}{|y_1|+|y_2|}\times h=\frac{0\cdot0682}{0\cdot0734}\times 0\cdot01=0\cdot00929.$$

তাহলে, x_1-এর তুলনায় শুদ্ধতর বীজ হবে $x_1^{(2)}=x_1+c_1=1\cdot76929$

এবং $y_3=f(x_1^{(2)})=0\cdot0001.$

কাজেই $$c_2=\frac{|y_1|}{|y_1|+|y_2|}\times (x_1^{(2)}-x_1)=0\cdot009286.$$

তাই $x_1^{(2)}$-এর তুলনায় শুদ্ধতর বীজ হবে

$$x_1^{(3)}=x_1+c_2=1\cdot769286.$$

কিন্তু $x_1^{(2)}=x_1^{(3)}=1\cdot7693$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন)

এবং এই পদ্ধতি অনুযায়ী এটিকেই নির্ণেয় বীজ বলে ধরে নিতে পারি।

আবার নিউটন-র‍্যাফসনের পদ্ধতি অনুসরণ করলে পাওয়া যায়

$a=1\cdot76,\ f'(x)=3x^2-2,\ f'(a)=f'(1\cdot76)=7\cdot2928,$

$$h_1=\frac{-f(a)}{f'(a)}=\frac{0\cdot0682}{7\cdot2928}=0\cdot00935.$$

তাহলে, $a^{(1)}=a+h_1=1\cdot76935$

$$f(a^{(1)})=0\cdot00043,\ f'(a^{(1)})=7\cdot3918,$$

$$h_2=\frac{-f(a^{(1)})}{f'(a^{(1)})}=-0\cdot000058.$$

কাজেই, $a^{(2)}=a^{(1)}+h_2=1\cdot769296$

$$\simeq 1\cdot7693$$

এবং একেই নির্ণেয় বীজরূপে গ্রহণ করতে পারি।

উদা. C.16 পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি

$x^2+x-1=0$ সমীকরণটির তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন একটি প্রকৃত বীজের মান নির্ণয় কর।

এই সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$x(x+1)-1=0$$

অর্থাৎ $x=\frac{1}{x+1}$. এখানে $\phi(x)=\frac{1}{x+1}$.

পর্যবেক্ষণ সূত্রে দেখা যায় যে, 0·62-কে এই সমীকরণটির একটি আসন্ন বীজ বলে মনে করা যেতে পারে। তাহলে $x_0=0{\cdot}62$ লিখে শুদ্ধতর বীজ হবে

$$x^{(1)}=\phi(x_0)=\frac{1}{1+x_0}=\frac{1}{1{\cdot}62}=0{\cdot}617.$$

এর চেয়েও শুদ্ধতর বীজ হবে

$$x^{(2)}=\phi(x^{(1)})=\frac{1}{1{\cdot}617}=0{\cdot}618.$$

তেমনিভাবে পাওয়া যাবে

$$x^{(3)}=\phi(x^{(2)})=\frac{1}{1{\cdot}618}=0{\cdot}618.$$

তাই, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বিবেচনা করলে দাঁড়ায়

$$x^{(2)}=x^{(3)}=0{\cdot}618.$$

কাজেই 0·618-কেই নির্ণেয় বীজ বলে ধরতে পারি।

C.5 নর্ম্যাল ভ্রান্তি তত্ত্ব (Normal Theory of Errors) :

কোন বস্তুর পরিমাপ নিতে গেলে সাধারণতঃ দেখা যায় যে, মাপন যন্ত্র যতই নিখুঁত হোক এবং মাপ নির্ণয়ের কাজে ও নির্ণীত মাপের হিসেব রাখায় যতই সাবধান হওয়া যাক্ না কেন খুব ভালভাবে বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে যে বস্তুর আসল মাপ ও নির্ণীত মাপের মধ্যে কিছু পার্থক্য থাকে। এই তফাৎকে পরিভাষানুযায়ী ভ্রান্তি (error) বলা হয়। এই ভ্রান্তির দুটি প্রকারভেদ লক্ষ্য করা যায় ; যথা (1) নিয়মিত ভ্রান্তি (systematic) যা মাপনযন্ত্রের খুঁত বা ভ্রমাত্মক মাপনা বা মাপনার হিসাব রাখায় অসাবধানতা ইত্যাদি যান্ত্রিক বা ব্যক্তিগত কারণে ঘটে এবং নির্ণীত প্রতিটি মাপকেই সমানভাবে বা অনভুমেয়ভাবে প্রভাবিত করে, এবং (2) অজ্ঞাত ও অনিয়ন্ত্রণাধীন কারণে সৃষ্ট ভ্রান্তি যার

পরিমাণ সাধারণতঃ খুবই কম হয়, কিন্তু সবরকম সতর্কতা সত্ত্বেও যাকে সম্পূর্ণ অপসারিত করা যায় না এবং যা একই বস্তুর বিভিন্ন মাপকে বিভিন্নভাবে প্রভাবিত করে। এই দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তিকে কোন সম্ভাবনা সূত্রানুযায়ী বিভাজিত বলে স্বীকার করা যায় এবং সেজন্যে একে সম্ভাবনাসাপেক্ষ ভ্রান্তিও (random error) বলা হয়। এজাতীয় ভ্রান্তি সম্পর্কে গাণিতিক আলোচনা করা সম্ভব। এখন এবিষয়ে কিছুটা আলোকপাত করা হবে।

মনে করা যাক্ বস্তুটির আসল কিন্তু অজ্ঞাত পরিমাপ হচ্ছে μ. যদি এর n-সংখ্যক নির্ণীত পরিমাপ হয় $x_1, x_2, \cdots, x_n$, তাহলে $x_1-\mu, \cdots, x_n-\mu$ হচ্ছে মাপনাগুলির ভ্রান্তি। যথাসম্ভব সততা, সাবধানতা ও বিশ্বস্ততার সঙ্গে পরিমাপগুলি নেওয়া হলেও অভিজ্ঞতা থেকে দেখা যায় যে, এদের প্রকৃতি ও পরিমাণ অজ্ঞাত ও অনমুমেয় (unpredictable) ধরনের। এদেরকে পরীক্ষণ বা অবেক্ষণমূলক ভ্রান্তি (experimental or observational error) বলা হয়। এদের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য এমন যে এদেরকে অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা চল বলে স্বীকার করা যায়। উনবিংশ শতাব্দীর গোড়ার দিকে গাউস (Gauss) এবং লাপ্লাস (Laplace) এ জাতীয় মাপনাভ্রান্তির প্রকৃতি এবং এদের সম্ভাবনা বিভাজনের রূপ সম্পর্কে অনেক আলোচনা করেছিলেন। সেই থেকেই আমাদের আলোচ্য ভ্রান্তি তত্ত্বটি গড়ে উঠেছে।

বস্তুর আসল পরিমাণ μ অজ্ঞাত থাকায় স্বভাবতঃই অবেক্ষণের ভিত্তিতে এর একটি যথোপযুক্ত প্রাক্কলক ব্যবহার করার কথা মনে হতে পারে। μ এর শ্রেষ্ঠ প্রাক্কলককে গাউস (Gauss) সর্বাধিক সম্ভাব্যমান (most probable value) বলে উল্লেখ করেছেন। n-সংখ্যক অবেক্ষিত পরিমাপ $x_1, \ldots, x_n$-এর ভিত্তিতে গঠিত অপেক্ষক $f(x_1 \ldots x_n)$-কে যদি μ-এর সর্বাধিক সম্ভাব্যমান বলে ধরতে হয় তাহলে গাউস f-এর ওপর নিম্নোক্ত পরস্পর নিরপেক্ষ ও সামঞ্জস্যপূর্ণ (independent and consistent) সর্ত আরোপ করেছেন :

(1) f-কে মূলবিন্দু-নিরপেক্ষ (origin-invariant) হতে হবে অর্থাৎ সব h-এর জন্যেই $f(x_1+h, \ldots, x_n+h)=f(x_1, \ldots, x_n)+h$ হতে হবে ;

(2) f-কে মাপনা-একক-নিরপেক্ষ (independent of unit of measurement) হতে হবে অর্থাৎ প্রত্যেক প্রকৃত রাশি k-এর জন্যে

$$f(kx_1, \ldots, kx_n)=k\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

হতে হবে ;

(3) f-কে $x_1, \ldots, x_n$-এর বিন্যাস-নিরপেক্ষ (independent of ordering) অপেক্ষক হতে হবে ;

এবং (4) সববিন্দুতেই f অপেক্ষকের একমানসম্পন্ন অবিচ্ছিন্ন অন্তর্কলক থাকতে হবে (The function f must have a single valued continuous derivative at every point).

এই সর্তগুলি খাটলে μ-এর সর্বাধিক সম্ভাব্যমান বা শ্রেষ্ঠ প্রাক্কলক হবে বিভিন্ন পরিমাপগুলির সরল যৌগিক গড় (simple arithmetic mean). কারণ, সর্ত-ক'টি মনে রেখে পাওয়া যায়

$$f(kx_1, \ldots, kx_n) = f(0, \ldots, 0) + k \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{\theta k\ x_i,} \quad 0 < \theta < 1 \cdots \text{(i)}$$

অথবা $f(x_1, \ldots x_n) \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{\theta k\ x_i}$

কারণ যদি $k \to 0$ হয় তবে (2) ও (i) থেকে পাওয়া যায় $f(0, \ldots 0) = 0$. আবার যদি $k \to 0$ হয়, তবে $\theta k\ x_i \to 0$ এবং ফলে $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{\theta k x i}$ হয়ে যায় x-নিরপেক্ষ অর্থাৎ পাওয়া যায় $f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i = c \sum_{i=1}^{n} xi$

[সর্ত (3) দ্রষ্টব্য].

কিন্তু সর্ত (1) থেকে পাওয়া যায়

$$f(x_1, \ldots, x_n) + h = c \sum x_i + c\, nh$$

অর্থাৎ $h = c\, nh$ বা $cn = 1$

অর্থাৎ $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

আমাদের পরবর্তী আলোচনায় গাউস, লাপ্লাস, লিজঁাদ্‌র্ (Legendre) প্রমুখ ভ্রান্তি তাত্ত্বিকগণের মতামত অনুযায়ী সর্বাধিক সম্ভাব্য মানকে গরিষ্ঠ আশংসাযুক্ত প্রাক্কলক (maximum likelihood estimator) ব'লে ধরা হবে এবং আমরা ধ'রে নেব যে, বিভিন্ন পরিমাপের ভ্রান্তিগুলি অর্থাৎ $e_i = x_i - \mu (i = 1, \ldots, n)$ হচ্ছে সম্ভাবনা তত্ত্বগত অর্থে পরস্পর অনধীন ও তাদের সম্ভাবনা বিভাজন প্রকৃতমান μ-এর ওপর নির্ভরশীল নয়। এর ফলশ্রুতি হিসেবে আমরা x-এর

সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $\varphi(x\,;\;\mu)$-কে $\varphi(x\,;\;\mu)=g(x-\mu)$ আকারে লিখতে পারব। তাহলে নমুনালব্ধ পরিমাণ $x_i(i=1, \cdots n)$ সমূহের আশংসা অপেক্ষক (likelihood function) হবে

$$L=L(\mu)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i-\mu).$$

তাহলে, $$\log L=\sum_{i=1}^{n} \log g(x_i-\mu),$$

এবং আশংসা সমীকরণ (likelihood equation) হবে

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=0 \quad \text{বা} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{g'(x_i-\mu)}{g(x_i-\mu)}=0.$$

এখন, $G(x-\mu)=\dfrac{g'(x-\mu)}{g(x-\mu)}$ লিখে পাই

$$\sum_i G(x_i-\mu)=0 \quad \text{বা} \quad \sum_i G(e_i)=0.$$

এখন, যেহেতু μ-এর গরিষ্ঠ আশংসামূলক প্রাক্কলক হচ্ছে $\hat{\mu}=\bar{x}$, কাজেই আমরা পাচ্ছি $\sum_i (x_i-\mu)=0$ বা $\sum e_i=0$.

তাহলে, $\sum_i G(e_i)=0$ ও $\sum e_i=0$ থেকে পাওয়া যায়

$$\sum\left\{G'(e_i)+\lambda\right\} d\, e_i=0. \quad [\ \lambda \text{ যে কোন ধ্রুবক }].$$

সুতরাং $G'(e_i)+\lambda=0$. কাজেই $G(e_i)+\lambda(e_i)+A=0$

[A হচ্ছে যে কোন অজ্ঞাত ধ্রুবক]

যেহেতু $\sum G(e_i)=0$ এবং $\sum e_i=0$, কাজেই $A=0$.

সুতরাং $G(x_i-\mu)+\lambda(x_i-\mu)=0$.

অর্থাৎ $\dfrac{g'(x_i-\mu)}{g(x_i-\mu)}+\lambda(x_i-\mu)=0$

অর্থাৎ সাধারণভাবে

$$\frac{g'(x-\mu)}{g(x-\mu)}=-\lambda(x-\mu).$$

ফলে, সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$\log_e g(x-\mu)=B-\frac{\lambda}{2}(x-\mu)^2$, [$B=$ ধ্রুবক]

অর্থাৎ $\varphi(x, \mu)=g(x-\mu)=c.\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(x-\mu\right)^2\right]$. তাহলে, স্পষ্টতঃই x-এর বিভাজন নর্ম্যাল গোত্রীয়। এখন সহজেই দেখা যায় যে, আমরা লিখতে পারি

$$\varphi(x\,;\,\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu\right)^2\right], \left[\lambda=\frac{1}{\sigma^2} \text{ লিখে}\right]$$

অর্থাৎ x-এর বিভাজন হচ্ছে $N(\mu\,;\,\sigma^2)$. তাহলে, ভ্রান্তি e-এর বিভাজন হচ্ছে $N(\mu\,;\,\sigma^2)$. এখানে $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ কে বলা হয় মাপনার সূক্ষ্মতা সূচক (Index of precision of measurements). স্পষ্টতঃই σ অর্থাৎ মাপনার বিচ্যুতির হ্রাস বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে সূক্ষ্মতায় যথাক্রমে বৃদ্ধি ও হ্রাস হতে থাকে।

ভ্রান্তি বিভাজন যে নর্ম্যাল প্রকৃতিবিশিষ্ট তা অন্যভাবেও প্রমাণ করা যায়। এই প্রসঙ্গে লক্ষ্যভেদ পরীক্ষার সাহায্যে মাপনা ভ্রান্তির বিভাজন নির্ণয়ের পদ্ধতি উল্লেখযোগ্য। এ প্রসঙ্গে J. B. Scarborough রচিত গ্রন্থ [নির্দেশিকা 5] দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী

C.1 প্রমাণ কর যে,

(i) $u_x+2\Delta u_{x-1}+3\Delta^2 u_{x-2}+4\Delta^3 u_{x-3}+\cdots=u_{x+2}$.

(ii) $\frac{d}{dx}u_x=\frac{2}{3}(u_{x+1}-u_{x-1})-\frac{1}{12}(u_{x+2})+u_{x-2}$

[আভাস : $D=\frac{d}{dx}$ লিখে $Eu_x=u_{x+1}=\left(1+D+\frac{D^2}{2}+\cdots\right)u_x$

অর্থাৎ $E=e^D$. কাজেই $E^{-1}=e^{-D}$]

(iii) $\log_e u_{n-1}+\Delta u_{n-1}+\frac{1}{2}\Delta^2 u_{n-2}$
$\qquad+\frac{1}{3}\Delta^3 u_{n-3}+\frac{1}{4}\Delta^4 u_{n-4}+\cdots=0.$

(iv) $u_0+u_1+\cdots+u_n=\binom{n+1}{1}u_0$
$\qquad+\binom{n+1}{2}\Delta u_0+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\Delta^n u_0.$

C.2 একটি অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা চল X-এর প্রসার হচ্ছে -1 থেকে $+1$ এবং

তার বিভাজন অপেক্ষক $F(x)$-এর মান x এর দুটি মান $-0·5$ ও $0·5$-এর জন্যে যথাক্রমে 0·37648 ও 0·83934. $F(0·25)$ ও $F(0·75)$-এর মান প্রক্ষেপণ নীতি অনুযায়ী নির্ণয় কর।

C.3 কোন অপেক্ষক u_x-এর জন্যে জানা আছে যে,

$$u_1 + u_2 = 16,\ u_3 + u_4 + u_5 = 144$$

এবং $$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 668.$$

u_2-এর মান কত হওয়া উচিত?

[আভাস : ধর, $u_x = a + bx + cx^2$]

C.4 কোন অপেক্ষক u_x-এর জন্যে দেওয়া আছে $u_1 = 7$, $u_3 = 13$, $u_6 = 37$ এবং $u_{10} = 97$. u_2 এর মান নির্ণয় কর। u_x যদি বহুঘাতজ অপেক্ষক হয়, তবে সেটি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় কর।

[আভাস : $u_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ধর]

C.5 ম্যান এবং হুইটনীর প্রকল্প বিচারে (Mann-Whitney Test) ব্যবহৃত নমুনাঙ্ক U এর জন্যে সংশয়সূচক অপেক্ষক $C(U\ ;\ n_1, n_2)$-এর মান দেওয়া আছে। $C(U\ ;\ 9, 16)$-এর মান প্রক্ষেপণ সাহায্যে নির্ণয় কর।

সারণী A.20

$C(\ U\ ;\ n_1, n_2\ )$

n_1 \ n_2	10	13	16	19
4	3	5	7	9
6	8	12	16	20
8	13	20	26	32
10	19	27	36	44

C.6 উপযুক্ত সর্ত আরোপ ক'রে দেখাও যে, আসন্নভাবে,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(-\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{1}{2})] + \tfrac{1}{24}[\Delta f(-\tfrac{3}{2}) - \Delta f(\tfrac{1}{2})]$$

[আভাস : ধর $f(x)=a+bx+cx^2$ এবং ওপরের সম্পর্কটির উভয়পার্শ্ব পৃথক্‌ভাবে নির্ণয় কর।]

C.7 $h=\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{10}$ ধ'রে সিম্পসনের নিয়ম অনুযায়ী

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$ এর দুটি আসন্নমান নির্ণয় কর ও সমাকলনটির আসল মানের তুলনায় তাদের ভ্রান্তির পরিমাণ নির্দেশ কর।

C.8 $e^x-2x=2$ সমীকরণটির একটি ধনাত্মক বীজের তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।

C.9 $x^3-x^2-6=0$ সমীকরণটির একটি ধনাত্মক প্রকৃত বীজের দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।

C.10 প্রক্ষেপণ পদ্ধতির মূলনীতি সংক্ষেপে বর্ণনা কর। এই পদ্ধতি প্রয়োগে বিভিন্ন সূত্র কেন ব্যবহার করা হয় বুঝিয়ে দাও।

C.11 কোন অপেক্ষকের কয়েকটি মানের ভিত্তিতে কিভাবে কোন নির্দিষ্ট প্রসারের মধ্যে তার সমাকলন নির্ণয় করা যায় তা বিশদভাবে বুঝিয়ে দাও।

নির্দেশিকা

1 Datta M. ; Pal. S. *Introduction to the Mathematical Theory of Probability and Statistics.* World Press, 1963.

2. Freeman, H. *Finite differences for Actuarial Studies,* 1962.

3. Goon, A.M. ; Gupta, M. K. ; Das Gupta B. *Fundamentals of Statistics.* Vol. I. The World Press Calcutta Ltd., 1968.

4. Gupta, A. *Groundwork of Mathematical Probability and Statistics.* Chaudhuri and Chaudhuri, Calcutta, 1962.

5. Scarborough, J. B. *Numerical Mathematical Analysis.* Oxford Uuiversity Press 1958, and Oxford Book Co. (Indian Edition), 1964.

6. Whittaker, E ; Robinson, G. *Calculus of Observations.* Blackie, 1964.

সারণী 1

মৌল নর্ম্যাল বিভাজনের কোটি এবং ক্ষেত্রফল*

τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$
.00	.3989423	.5000000						
.01	.3989223	.5039894	.51	.3502919	.6949743	1.01	.2395511	.8437524
.02	.3988625	.5079783	.52	.3484925	.6984682	1.02	.2371320	.8461358
.03	.3987628	.5119665	.53	.3466677	.7019440	1.03	.2347138	.8484950
.04	.3986233	.5159534	.54	.3448180	.7054015	1.04	.2322970	.8508300
.05	.3984439	.5199388	.55	.3429439	.7088403	1.05	.2298821	.8531409
.06	.3982248	.5239222	.56	.3410458	.7122603	1.06	.2274696	.8554277
.07	.3979661	.5279032	.57	.3391243	.7156612	1.07	.2250599	.8576903
.08	.3976677	.5318814	.58	.3371799	.7190427	1.08	.2226535	.8599289
.09	.3973298	.5358564	.59	.3352132	.7224047	1.09	.2202508	.8621434
.10	.3969525	.5398278	.60	.3332246	.7257469	1.10	.2178522	.8643339
.11	.3965360	.5437953	.61	.3312147	.7290691	1.11	.2154582	.8665005
.12	.3960802	.5477584	.62	.3291840	.7323711	1.12	.2130691	.8686431
.13	.3955854	.5517168	.63	.3271330	.7356527	1.13	.2106856	.8707619
.14	.3950517	.5556700	.64	.3250623	.7389137	1.14	.2083078	.8728568
.15	.3944793	.5596177	.65	.3229724	.7421539	1.15	.2059363	.8749281
.16	.3938684	.5635595	.66	.3208638	.7453731	1.16	.2035714	.8769756
.17	.3932190	.5674949	.67	.3187371	.7485711	1.17	.2012135	.8789995
.18	.3925315	.5714237	.68	.3165929	.7517478	1.18	.1988631	.8809999
.19	.3918060	.5753454	.69	.3144317	.7549029	1.19	.1965205	.8829768
.20	.3910427	.5792597	.70	.3122539	.7580363	1.20	.1941861	.8849303
.21	.3902419	.5831662	.71	.3100603	.7611479	1.21	.1918602	.8868606
.22	.3894038	.5870644	.72	.3078513	.7642375	1.22	.1895432	.8887676
.23	.3885286	.5909541	.73	.3056274	.7673049	1.23	.1872354	.8906514
.24	.3876166	.5948349	.74	.3033893	.7703500	1.24	.1849373	.8925123
.25	.3866681	.5987063	.75	.3011374	.7733726	1.25	.1826491	.8943502
.26	.3856834	.6025681	.76	.2988724	.7763727	1.26	.1803712	.8961653
.27	.3846627	.6064199	.77	.2965948	.7793501	1.27	.1781038	.8979577
.28	.3836063	.6102612	.78	.2943050	.7823046	1.28	.1758474	.8997274
.29	.3825146	.6140919	.79	.2920038	.7852361	1.29	.1736022	.9014747
.30	.3813878	.6179114	.80	.2896916	.7881446	1.30	.1713686	.9031995
.31	.3802264	.6217195	.81	.2873689	.7910299	1.31	.1691468	.9049021
.32	.3790305	.6255158	.82	.2850364	.7938919	1.32	.1669370	.9065825
.33	.3778007	.6293000	.83	.2826945	.7967306	1.33	.1647397	.9082409
.34	.3765372	.6330717	.84	.2803438	.7995458	1.34	.1625551	.9098773
.35	.3752403	.6368307	.85	.2779849	.8023375	1.35	.1603833	.9114920
.36	.3739106	.6405764	.86	.2756182	.8051055	1.36	.1582248	.9130850
.37	.3725483	.6443088	.87	.2732444	.8078498	1.37	.1560797	.9146565
.38	.3711539	.6480273	.88	.2708640	.8105703	1.38	.1539483	.9162067
.39	.3697277	.6517317	.89	.2684774	.8132671	1.39	.1518308	.9177356
.40	.3682701	.6554217	.90	.2660852	.8159399	1.40	.1497275	.9192433
.41	.3667817	.6590970	.91	.2636880	.8185887	1.41	.1476385	.9207302
.42	.3652627	.6627573	.92	.2612863	.8212136	1.42	.1455641	.9221962
.43	.3637136	.6664022	.93	.2588805	.8238145	1.43	.1435046	.9236415
.44	.3621349	.6700314	.94	.2564713	.8263912	1.44	.1414600	.9250663
.45	.3605270	.6736448	.95	.2540591	.8289439	1.45	.1394306	.9264707
.46	.3588903	.6772419	.96	.2516443	.8314724	1.46	.1374165	.9278505
.47	.3572253	.6808225	.97	.2492277	.8339768	1.47	.1354181	.9292191
.48	.3555325	.6843863	.98	.2468095	.8364569	1.48	.1334353	.9305634
.49	.3538124	.6879331	.99	.2443904	.8389129	1.49	.1314684	.9318879
.50	.3520653	.6914625	1.00	.2419707	.8413447	1.50	.1295176	.9331928

সারণী 1 (পূর্বানুবৃত্ত)

τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$
1.51	.1275830	.9344783	2.01	.0529192	.9777844	2.51	.0170947	.9939634
1.52	.1256646	.9357445	2.02	.0518636	.9783083	2.52	.0166701	.9941323
1.53	.1237628	.9369916	2.03	.0508239	.9788217	2.53	.0162545	.9942969
1.54	.1218775	.9382198	2.04	.0498001	.9793248	2.54	.0158476	.9944574
1.55	.1200090	.9394292	2.05	.0487920	.9798178	2.55	.0154493	.9946139
1.56	.1181573	.9406201	2.06	.0477996	.9803007	2.56	.0150596	.9947664
1.57	.1163225	.9417924	2.07	.0468226	.9807738	2.57	.0146782	.9949151
1.58	.1145048	.9429466	2.08	.0458611	.9812372	2.58	.0143051	.9950600
1.59	.1127042	.9440826	2.09	.0449148	.9816911	2.59	.0139401	.9952012
1.60	.1109208	.9452007	2.10	.0439836	.9821356	2.60	.0135830	.9953388
1.61	1091548	.9463011	2.11	.0430674	.9825708	2.61	.0132337	.9954729
1.62	.1074061	.9473839	2.12	.0421661	.9829970	2.62	.0128921	.9956035
1.63	1056748	.9484493	2.13	.0412795	.9834142	2.63	.0125581	.9957308
1.64	.1039611	.9494974	2.14	.0404076	.9838226	2.64	.0122315	.9958547
1.65	.1022649	.9505285	2.15	.0395500	.9842224	2.65	.0119122	.9959754
1.66	.1005864	.9515428	2.16	.0387069	.9846137	2.66	.0116001	.9960930
1.67	.0989255	.9525403	2.17	.0378779	.9849966	2.67	.0112951	.9962074
1.68	.0972823	.9535213	2.18	.0370629	.9853713	2.68	.0109969	.9963189
1.69	.0956568	.9544860	2.19	.0362619	.9857379	2.69	.0107056	.9964274
1.70	.0940491	.9554345	2.20	.0354746	.9860966	2.70	.0104209	.9965330
1.71	.0924591	.9563671	2.21	.0347009	.9864474	2.71	.0101428	.9966358
1.72	.0908870	.9572838	2.22	.0339408	.9867906	2.72	.0098712	.9967359
1.73	.0893326	.9581849	2.23	.0331939	.9871263	2.73	.0096058	.9968333
1.74	.0877961	.9590705	2.24	.0324603	.9874545	2.74	.0093466	.9969280
1.75	.0862773	.9599408	2.25	.0317397	.9877755	2.75	.0090936	.9970202
1.76	.0847764	.9607961	2.26	.0310319	.9880894	2.76	.0088465	.9971099
1.77	.0832932	.9616364	2.27	.0303370	.9883962	2.77	.0086052	.9971972
1.78	.0818278	.9624620	2.28	.0296546	.9886962	2.78	.0083697	.9972821
1.79	.0803801	.9632730	2.29	.0289847	.9889893	2.79	.0081398	.9973646
1.80	.0789502	.9640697	2.30	.0283270	.9892759	2.80	.0079155	.9974449
1.81	.0775379	.9648521	2.31	.0276816	.9895559	2.81	.0076965	.9975229
1.82	.0761433	.9656205	2.32	.0270481	.9898296	2.82	0074829	.9975988
1.83	.0747663	.9663750	2.33	.0264265	.9900969	2.83	.0072744	.9976726
1.84	.0734068	.9671159	2.34	.0258166	.9903581	2.84	.0070711	.9977443
1.85	.0720649	.9678432	2.35	0252182	.9906133	2.85	.0068728	.9978140
1.86	.0707404	.9685572	2.36	.0246313	.9908625	2.86	.0066793	.9978818
1.87	.0694333	.9692581	2.37	.0240556	.9911060	2.87	.0064907	.9979476
1.88	.0681436	.9699460	2.38	.0234910	.9913437	2.88	.0063067	.9980116
1.89	.0668711	.9706210	2.39	.0229374	.9915758	2.89	.0061274	.9980738
1.90	.0656158	.9712834	2.40	.0223945	.9918025	2.90	.0059525	.9981342
1.91	.0643777	.9719334	2.41	.0218624	.9920237	2.91	.0057821	.9981929
1.92	.0631566	.9725711	2.42	.0213407	.9922397	2.92	.0056160	.9982498
1.93	.0619524	.9731966	2.43	.0208294	.9924506	2.93	.0054541	.9983052
1.94	.0607652	.9738102	2.44	.0203284	.9926564	2.94	.0052963	.9983589
1.95	.0595947	.9744119	2.45	.0198374	.9928572	2.95	.0051426	.9984111
1.96	.0584409	.9750021	2.46	.0193563	.9930531	2.96	.0049929	.9984618
1.97	.0573038	.9755808	2.47	.0188850	.9932443	2.97	.0048470	.9985110
1.98	.0561831	.9761482	2.48	.0184233	.9934309	2.98	.0047050	.9985588
1.99	.0550789	.9767045	2.49	.0179711	.9936128	2.99	.0045666	.9986051
2.00	.0539910	.9772499	2.50	.0175283	.9937903	3.00	.0044318	.9986501

সারণী 1 (পূর্বানুবৃত্ত)

τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$	τ	$\phi(\tau)$	$\Phi(\tau)$
3.01	.0043007	.9986938	3.21	.0023089	.9993363	3.41	.0011910	.9996752
3.02	.0041729	.9987361	3.22	.0022358	.9993590	3.42	.0011510	.9996869
3.03	.0040486	.9987772	3.23	.0021649	.9993810	3.43	.0011122	.9996982
3.04	.0039276	.9988171	3.24	.0020960	.9994024	3.44	.0010747	.9997091
3.05	.0038098	.9988558	3.25	.0020290	.9994230	3.45	.0010383	.9997197
3.06	.0036951	.9988933	3.26	.0019641	.9994429	3.46	.0010030	.9997299
3.07	.0035836	.9989297	3.27	.0019010	.9994623	3.47	.0009689	.9997398
3.08	.0034751	.9989650	3.28	.0018397	.9994810	3.48	.0009358	.9997493
3.09	.0033695	.9989992	3.29	.0017803	.9994991	3.49	.0009037	.9997585
3.10	.0032668	.9990324	3.30	.0017226	.9995166	3.50	.0008727	.9997674
3.11	.0031669	.9990646	3.31	.0016666	.9995335	3.51	.0008426	.9997759
3.12	.0030698	.9990957	3.32	.0016122	.9995499	3.52	.0008135	.9997842
3.13	.0029754	.9991260	3.33	.0015595	.9995658	3.53	.0007883	.9997922
3.14	.0028835	.9991553	3.34	.0015084	.9995811	3.54	.0007581	.9997999
3.15	.0027943	.9991836	3.35	.0014587	.9995959	5.55	.0007317	.9998074
3.16	.0027075	.9992112	3.36	.0014106	.9996103	3.56	.0007061	.9998146
3.17	.0026231	.9992378	3.37	.0013639	.9996242	3.57	.0006814	.9998215
3.18	.0025412	.9992636	3.38	.0013187	.9996376	3.58	.0006575	.9998282
3.19	.0024615	.9992886	3.39	.0012748	.9996505	3.59	.0006343	.9998347
3.20	.0023841	.9993129	3.40	.0012322	.9996631	3.60	.0006119	.9998409

* Biometrika Trustees এর অনুমতিক্রমে Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1 এর Table 1 থেকে সংক্ষেপিত আকারে মুদ্রিত।

সারণী 2

মৌল নর্মাল বিভাজন

(τ_α-এর কয়েকটি মান)

α	0.05	0.025	0.01	0.005
τ_α	1.645	1.960	2.326	2.576

সারণী ৪

χ^2 বিভাজন *

($\chi^2_{\alpha,\nu}$ এর মান)

ν \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.878
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.999	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.114	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.688	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.706	22.164	24.433	26.509	55.759	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.537	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.169

* Biometrika Trustees এর অনুমতিক্রমে Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1 এর Table 8 থেকে সংক্ষেপিত আকারে মুদ্রিত।

সারণী 4

t বিভাজন *

($t_{v,\,\alpha}$ এর মান)

v \ α	0.05	0.025	0.01	0.005
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.645	1.960	2.326	2.576

* Biometrika Trustees এর অনুমতিক্রমে Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1 এর Table 12 থেকে সংক্ষেপিত আকারে মুদ্রিত।

সারণী 5

F বিভাজন*

($F_{.05}$; ν_1, ν_2 এর মান)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	1941	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

সারণী 5 (পূর্বানুবৃত্ত)

($F_{.01}$; ν_1, ν_2 এর মান)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	5.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

*Biometrika Trustees এর অনুমতিক্রমে Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1 এর Table 18 থেকে সংক্ষেপিত আকারে মুদ্রিত।

সারণী 6

সমসম্ভব সংখ্যাসারি*

(Random Numbers)

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	8445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950
8479	6062	5593	6322	9439	4996	1322	4918
9917	3490	5533	2577	4348	0971	2580	1943
6376	9899	9259	5117	1336	0146	0680	4052
7287	0983	3236	3252	0277	8001	6058	4501
0592	4912	3457	8773	5146	2519	3931	6794
6499	9118	3711	8838	0691	1425	7768	9544
0769	1109	7909	4528	8772	1876	2113	4781
8678	4873	2061	1835	5054	5026	2967	6560
0178	7794	6488	7364	4094	1649	2284	7753
3392	0963	6364	5762	0322	2592	3452	9002
0264	6009	1311	5873	5926	8597	9051	8995
4089	7732	8163	2798	1984	1292	0041	2500
9376	7365	7987	1937	2251	3411	6737	0367
3039	3780	2137	7641	4030	1604	2517	9211
8971	8653	1855	5285	5631	2649	6696	5475
0373	4153	5199	5765	2067	6627	3100	5716
9092	4773	0002	7000	7800	2292	2933	6125
2464	1038	3163	3569	7155	2029	2538	7080
3027	6215	3125	5856	9543	3660	0255	5544
5754	9247	1164	3283	1865	5274	5471	1346
4358	3716	6949	8502	1573	5763	5046	7135
7178	8324	8379	7365	4577	4864	0629	5100
5035	5939	3665	2160	6700	7249	1738	2721
3318	0220	3611	9887	4608	8664	2185	7290
9058	1735	7435	6822	6622	8286	8901	5534
7886	5182	7595	0305	4903	3306	8088	3899
3354	8454	7386	1333	5345	6565	3159	3991
3415	7671	0846	7100	1790	9449	6285	2525
3918	5872	7898	6125	2268	1898	0755	6034
6138	9045	6950	8843	6533	0917	6673	5721
3825	1704	2835	4677	4637	7329	3156	3291
1349	0417	9311	9787	1284	0769	8422	1077
4234	0248	7760	6504	2754	4044	0842	9080
6880	3201	7044	3657	5263	0374	7563	6599
0714	5008	5076	1134	5342	1608	5179	0967
3448	6421	3304	0583	1260	0662	7257	0766
5711	7343	7539	3684	9397	5335	4031	1486
2588	3301	0553	2427	3598	2580	7017	9176
8581	4253	7404	5264	5411	3431	3092	8573
8475	6322	3949	9675	6533	1133	8776	2216
0272	5624	8549	5552	7469	2799	2822	9620
7383	7795	7939	2652	4456	6993	2950	8573
5126	2089	7729	0945	3901	4445	7117	8186
2064	3760	0939	7319	5939	3432	2030	4752
9315	8185	7805	6294	7072	6491	4012	1016
6814	8752	3462	6001	3302	3895	7371	3432

সারণী 6 (পূর্বানুবৃত্ত)

4433	0247	9747	0412	3893	2503	2972	4154
9193	7314	1501	4702	7030	9601	0630	3727
4246	0693	6041	0931	2952	4968	8239	7729
6974	1051	8966	5157	2154	9558	7646	3043
5673	1602	8741	0513	8713	6108	7329	7698
7370	7319	4104	6025	4209	5042	4501	7824
6934	0165	3319	6222	4129	6524	4322	9422
1592	6953	7868	5874	0805	1138	9428	0189
4683	7249	1998	0956	8325	4001	2261	8844
4206	3295	1732	6780	8409	6957	5292	5041
5885	3316	1187	1217	3912	1107	7220	0035
2584	4222	9438	9652	0338	9712	8715	9587
1275	5976	4273	4895	5751	3112	5082	6050
6801	1709	0038	1231	5222	2473	8909	9970
6853	9282	1196	0347	3135	5902	2384	7929
3210	4345	4448	0229	0371	8269	4448	3348
1684	5742	1897	2503	1656	5702	4613	4108
2391	2897	3406	4844	8756	8011	0246	3663
2543	3913	1429	6379	3369	9040	5983	0436
6793	5986	8153	0769	3347	4014	7007	9018
8118	4646	9668	3408	8878	3534	5549	6929
4970	2717	9943	1136	9504	0519	5240	0991
4496	1109	8238	9173	6244	7230	0991	1463
9022	5050	5383	9582	1326	2516	5589	4051
4816	1007	1067	2866	7916	2674	5578	1675
8897	4869	3221	3266	3567	3365	3675	2195
4234	7491	8194	5072	6555	0799	1940	1232
6933	5786	6675	7853	8325	9408	3252	6799
0502	3633	7793	1529	4067	5459	8641	3247
6440	9450	8896	1441	7718	4849	3192	5958
1248	0405	4572	6861	3737	9558	1025	8707
3110	1168	6046	5837	6243	6745	2362	7710
8822	3604	7844	2085	7923	7979	0648	9003
8680	1201	2536	0308	8733	9722	4556	4684
5327	1250	9502	0340	9894	0438	2677	9200
3798	0805	8037	7474	0516	8715	8398	5552
2688	7601	3408	6525	2710	4547	9156	1623
8552	8348	7934	1530	3523	6882	4334	7237
8713	5638	7620	3148	4508	3123	4023	4560
2104	4716	7582	4576	8105	7527	9082	2426
6503	8499	3100	2209	3406	6314	6910	8051
0085	0711	9557	8428	4332	9685	6492	7422
3822	3407	5603	5431	0083	7074	6929	7054
2193	9184	4815	0566	1214	8483	2282	0916
5392	1390	7100	4578	5107	7946	4502	2765
4635	6166	3085	4297	8619	0912	6917	5364
0495	3715	6053	1723	0114	8257	4650	9901
3296	3067	3040	0852	2939	4015	6927	7710
1348	5573	7270	6840	7450	5933	6472	3750
3132	2603	5574	1528	8104	5520	7279	7940

*Department of Statistics, University College, London এর অনুমতিক্রমে Tracts for Computers, No. XV (*Random Sampling Numbers*, L.H.C. Tippett প্রণীত) এর 12-18 পৃষ্ঠা থেকে উদ্ধৃত।

নির্ঘণ্ট

অনুমান তত্ত্ব 483
অন্তরের বহুখণ্ডন 685
অপেক্ষক
    অবিমিশ্র—674
    অবিমিশ্র ক্রমিক—673
    আশংসা—487, 722
    গামা—647-649
    বহুঘাতজ—657
    বিটা—647-649
    বিন্যাস-নিরপেক্ষ—721

উপনির্ণায়ক 632
উপসারণীগঠন 685

ক্রমগতি সাধন 403

গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলক 486-499
    দ্বিপদ পূর্ণকাঙ্কের—488-490
    নর্ম্যাল পূর্ণকাঙ্কের—492-499
    পোয়াসঁ পূর্ণকাঙ্কের—490-492
গাণিতিক প্রত্যাশা 464
    অশোধিত পরিঘাতের 464, 467
    ভগ্নাংশের 472-476
    ভেদমানের 467-470

চলমান গড় 417
চলের রূপান্তর 640-643

টেলারের বিস্তৃতি সারি 714

দ্বিঘাতরূপ 635-636
দ্বিপদ বিভাজন 426-428

নমুনা 422
    সমসম্ভব—423
    সম্ভাবনাশ্রয়ী—423
    —চয়ন 422-424
    —সমীক্ষা 422
নমুনাঙ্ক 424
    পর্যাপ্ত—485
    —এর রূপান্তর 590-596
নমুনাঙ্ক চাঞ্চল্য 424
নমুনাঙ্ক বিভাজন 425
    গড় ও ভেদমানের—450-453
    ফিশারের F-এর—462-463
    ফিশারের t-এর—455-456
    নির্ভরণাঙ্কের—458-462
    স্টুডেন্টের t-এর—454-455
    স্টুডেন্টের যুগ্ম t-এর—457-458
নর্ম্যাল বিভাজন 432-436
নর্ম্যাল ভ্রান্তিতত্ত্ব 719-725
নর্ম্যাল সমীকরণ 406

নির্ণায়ক 632
নির্ভরণাঙ্ক 717

পরিঘাত পদ্ধতি 415
পরিসংখ্যা x^2 596-598
—এর সাহায্যে
অনপেক্ষতা বিচার 603-605
অন্তর্সাম্য বিচার 600-603
সাযুজ্যের উৎকর্ষ বিচার 599-600
পার্থক্য সারণী 658
পূর্ণক 422
পূর্ণকাঙ্ক 424
পূর্ণাঙ্গ পর্যবেক্ষণ 422
পূর্বাভাস 402
পোয়াসঁ বিভাজন 426-428
প্রকল্প 500-501
বৈকল্পিক—500-501
মুখ্য—500-501
যৌগিক—500
সরল—500
প্রকল্প বিচার 483
উভয় পাক্ষিক—503
একপাক্ষিক—503
নেম্যান-পিয়ার্সনীয়—500-504
বৃহৎ-নমুনাভিত্তিক—577-590
স্বল্পাভিত্তিক—504-507
যথার্থ—507-532
সর্বোচ্চ শক্তিসম্পন্ন—502
—এর পক্ষপাতশূন্যতা 503
—এর বর্জনাঞ্চল 501
—এর ভ্রান্তি 501
—এর শক্তি 502
—এর সংশয়মাত্রা 502
প্রক্ষেপণ 655
অন্তঃ—657
দ্বিচলক—693
প্রত্যক্ষ—689
বহিঃ—657
বিবর্ত—689
প্রক্ষেপণ সূত্র 657
গাউসের—677, 680
নিউটনের—663-665
বিভক্ত পার্থক্য—672
বেসেলের—681
মাধ্যমিক পার্থক্য—677
লাগ্রাঞ্জের—669
স্টার্লিংএর—680
—এর অবশিষ্ট পদ 699-702
প্রত্যন্ত পার্থক্য 537
প্রধান পদ 659
প্রধান পার্থক্য পদ 659
প্রভেদ-বিশ্লেষণ 532-540
প্রমাণ-ভ্রান্তি 425
অশোধিত পরিঘাতের—464-467
ভগ্নাংশের—472-476
ভেদমানের—467-470
প্রয়োজক 672, 694
পার্থক্য—672
প্রাক্কলন 483-500, 507-532

অন্তর—483, 499-500, 507-532, 577-590
বিন্দু—483-499
প্রাক্কলন পদ্ধতি 486-488
গরিষ্ঠ আশংসা—486-499
পরিঘাত—416
প্রাক্কলক 484
অদক্ষ—485
গরিষ্ঠ আশংসা—487, 721
দক্ষ—484-485
পক্ষপাতশূন্য—484
লঘিষ্ঠ ভেদমান—484
সমঞ্জস—484-485

বর্গসমষ্টি 534
অন্তঃগোষ্ঠীক—534
আন্তঃগোষ্ঠীক—534
বিভাজন
F—445-449
χ^2—437-442
t—442-445
দ্বিপদ—426-428
নর্ম্যাল—432-436
পোয়াসঁ—428-430
বৃহৎ-নমুনা তত্ত্ব 567-628

ভ্রান্তি 719
অবেক্ষণ—402, 720
আসন্নীকরণ—650
নিয়মিত—719
মাপনা—401
সম্ভাবনাসাপেক্ষ—720
—পদ 657, 699-702

মসৃণতাসাধন 402
মাপনার সূক্ষ্মতাসূচক 723
ম্যাট্রিক্স 629-643
অনন্য—633
একক—631
কর্ণ—631
পরিবর্ত—631
প্রতিলম্ব—634
প্রতিসম—631
বর্গ—631
বিবর্ত—633
শূন্যময়—629
সন্নিহিত—633
—এর মানক্রম 634

রূপান্তর 640-643
ঋজুরৈখিক—640-641
কৌণিক—640-643
প্রতিলম্ব—641-642
$\log s$ ও $\log s^2$—592
$\sin^{-1} \sqrt{p}$—591
$\sqrt{x}$—592
z—593
—এর জ্যাকোবিয়ান 640-641
—এর মডিউলাস 640

লঘিষ্ঠ বর্গপদ্ধতি 405
লাগ্রাঞ্জের অনির্ধারিত গুণক 644-646

শুদ্ধি 714
ইয়েটসের—608-609
—উপকরণ 539
—পদ 714
—করণ উৎপাদক 470-472

সংখ্যাভিত্তিক সমাকলন 702-710
—এর ট্র্যাপিজয়ডাল বিধি 703-705
—সিম্পসনের বিধি 705-710
সমীকরণ 636-637
অসমজাতীয়—637
আশংসা—722
ঋজুরৈখিক—636-639
নর্ম্যাল—406
সমজাতীয়—637
সমঞ্জস—636
সমীকরণের সংখ্যাভিত্তিক সমাধান 710-719
—এর নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি 713
—পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি 716
—ভ্রান্ত অবস্থিতি পদ্ধতি 712
সম্ভাবনাগরিষ্ঠ মান 720
সম্ভাবনা সাপেক্ষ ভ্রান্তি 720
সাযুজ্য নিরূপণ 403-419
গোষ্ঠীগড় পদ্ধতিতে 413-415
চলমানগড় পদ্ধতিতে 417
নির্বাচিত বিন্দু পদ্ধতিতে 413
পরিঘাত পদ্ধতিতে 415 416
লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে 405-410
হস্তাঙ্কন রেখা পদ্ধতিতে 403
সার্থক অঙ্ক 650

শুদ্ধিপত্র

পৃষ্ঠা	লাইন	অশুদ্ধ অংশ (যা আছে)	শুদ্ধ অংশ (যা হবে)
402	5	$e^{r\beta-t)}$	$e^{r(\beta-t)}$
404	9	উপরের উদাহরণটি	সারণী 12.1
407	14	4	n
409	17	$u=c+bu\ [u=$	$Z=c+bu[Z=$
410	15	$V^{\gamma}=k$	$PV^{\gamma}=K$
,,	16	$\lvert Z\rvert\ \hat{P}=\text{antilog}\lvert$ Z	$\lvert\hat{Z}\rvert\ \hat{V}=\text{antilog}\lvert$ $\hat{Z}$
416	19	এই	এই হ'ল
426	14	এবং —{	এবং $P[x_2=k_2]=\{$
432	21	$\left(\frac{y-a}{b}\right)$	$\left(\frac{y-a}{b}-\mu\right)$
449	3	n	n_2
454	9	$s'\ \sqrt{n}$	$s'/\sqrt{n}$
474	17	পুরোটাই	আবার যদি $n_i=np_i$ ও $m_i=nP_i$ হয়, তবে $E(n_i)=nP_i=m_i$
,,	18	$=\frac{mi(n-m_i)}{n}$	$=nP_i(1-P_i)=\frac{m_i(n-m_i)}{n}$
475	12	$\lambda_i\lambda'_i$ cov	$\lambda_i\lambda'_{i'}$ cov
590	1	নর্ম্যালের	নর্ম্যাল পূর্ণকের
595	17	H_0	H
604	10	$P_0\ P_{01}\ Y_{03}$	$P_{01}\ P_{02}\ P_{03}$
605	6	χ	χ^2
,,	12	মান n	মান
608	7	ইয়েটের···Yate's	ইয়েট্সের···Yates'
638	7	⊙1	1
,,	8	3	⊙3